Corso di Campi Elettromagnetici

Carta di Smith

ESEMPI PRATICI

Ing. Enrico Coscelli

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

Esempio 1

Calcolo del Rapporto d’onda stazionario (ROS)

L’impedenza in ingresso di una linea di trasmissione a **75Ω** è **Z_i = (75+j150)Ω**. Quanto vale il **ROS** in questa linea?

L'impedenza normalizzata vale:

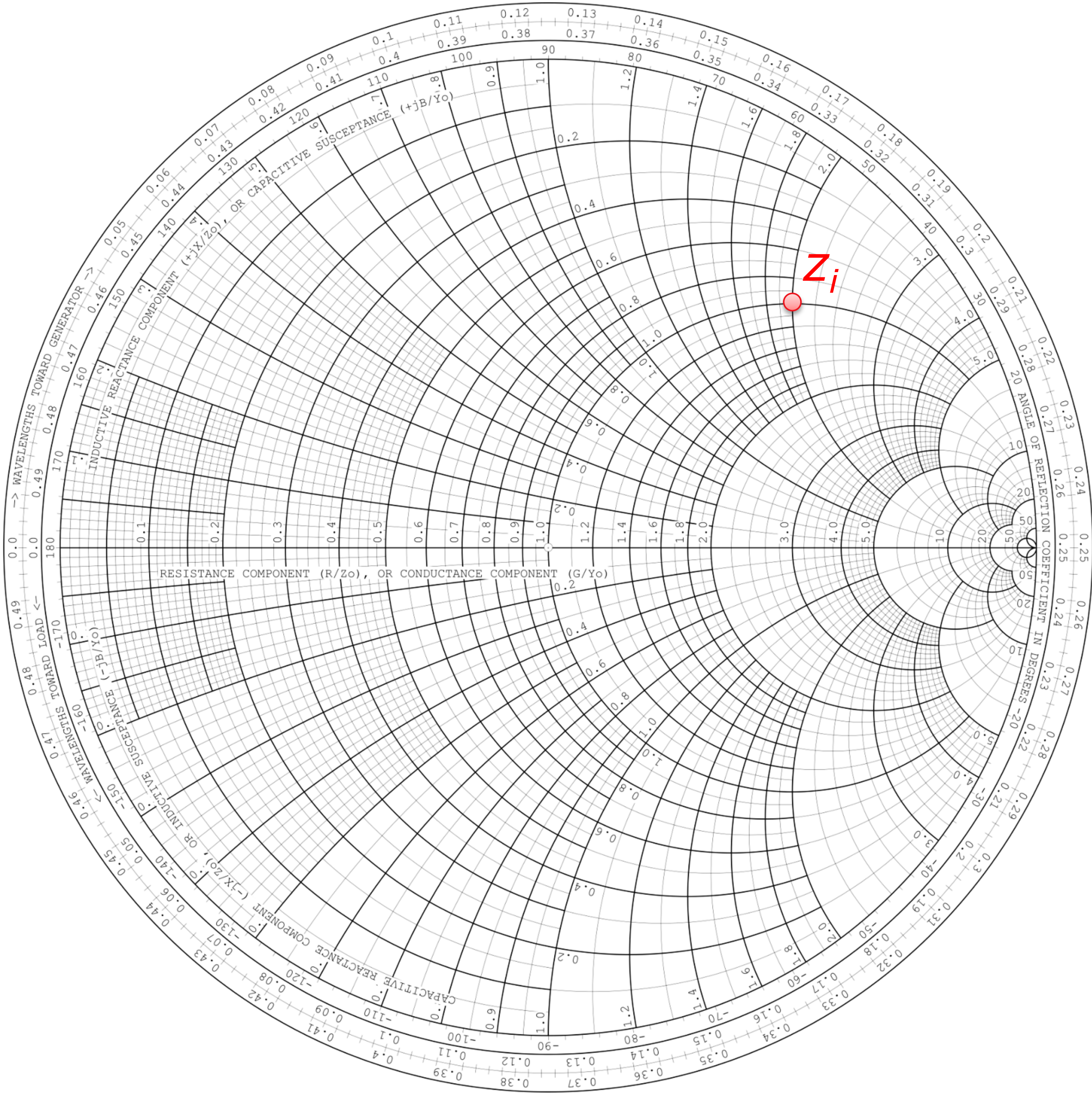
$$z_i = \frac{Z_i}{Z_0}$$

Quindi:

$$z_i = \frac{(75 + j150)\Omega}{75\Omega}$$

$$\mathbf{z_i = 1 + j2}$$

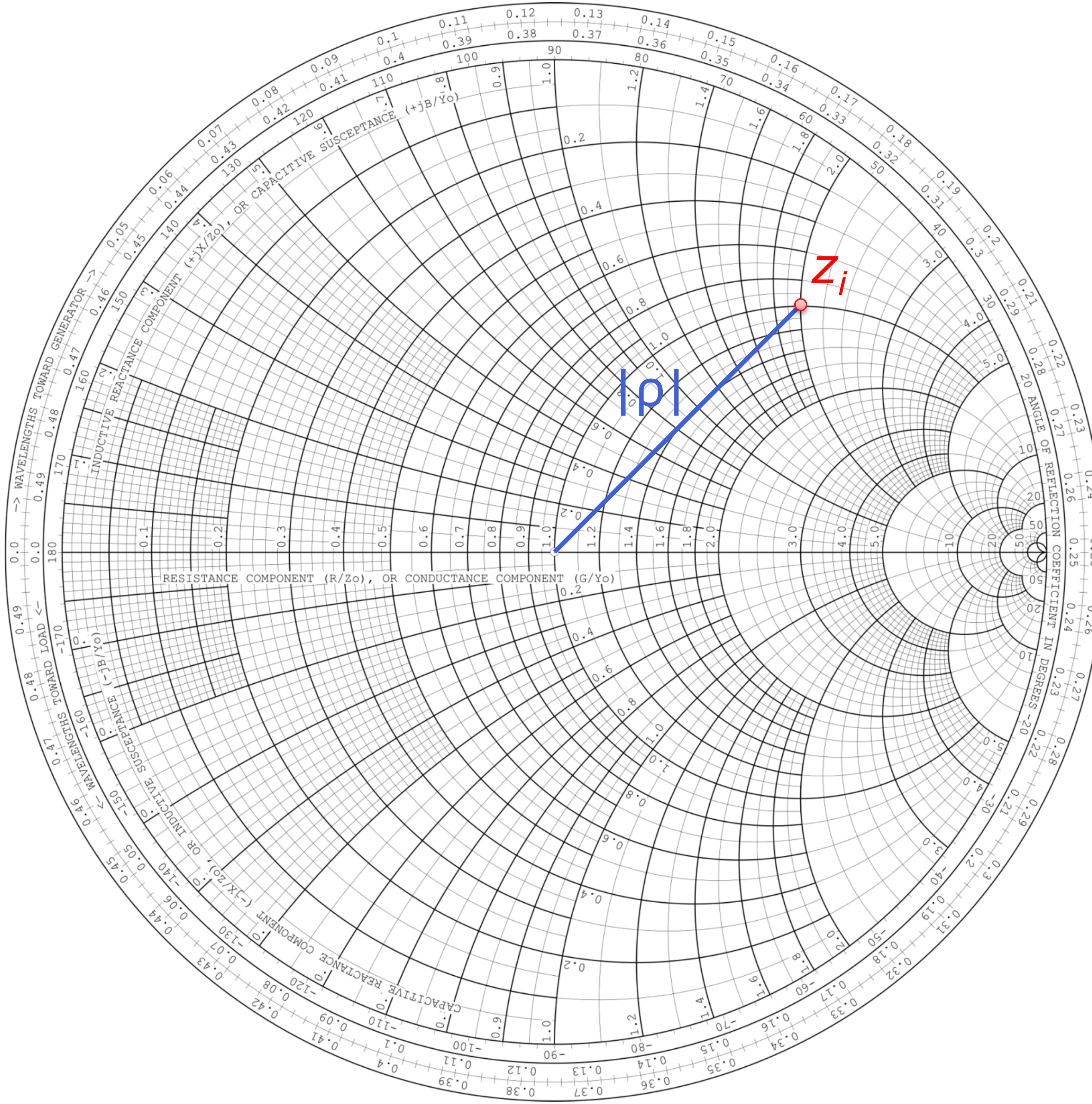
Individuo il punto corrispondente sulla C.d.S.



Il valore di |ρ| è pari alla lunghezza del segmento che collega il centro della carta al punto corrispondente a z_i

Dalla C.d.S.:

|ρ| = 0.71



ATTENZIONE: Se misurate la lunghezza del segmento sulla vostra carta dovete ricordarvi di **normalizzare** per il raggio della carta stessa (si assume che la C.d.S. abbia raggio unitario!)

Ruoto sulla curva di ROS fino ad intersecare l’asse delle impedenze Reali.

Il ROS è numericamente uguale all’impedenza in quel punto.

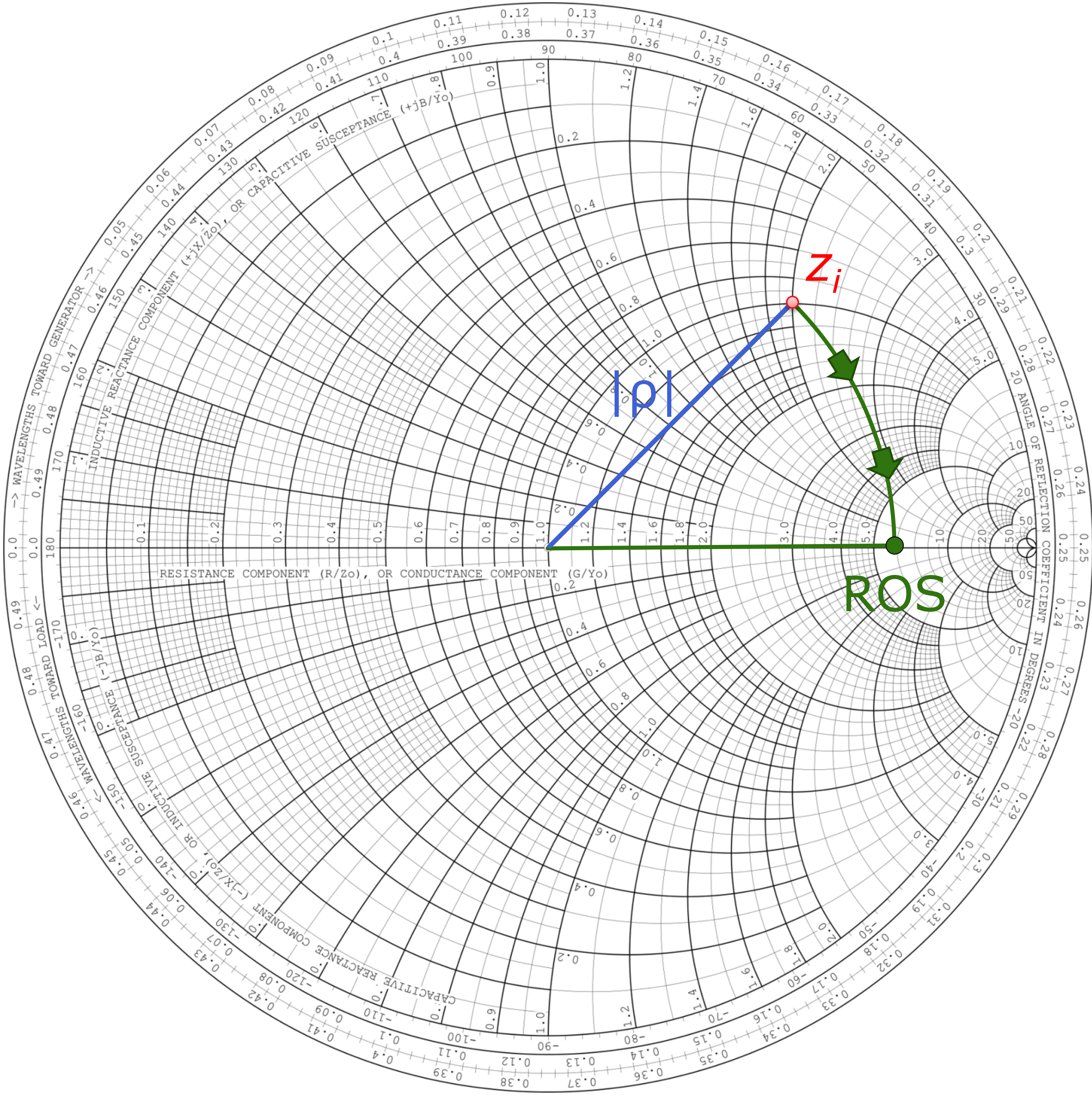
Graficamente:

ROS ≈ 5.9

Analiticamente:

$$ROS = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

$$\boxed{ROS = \frac{1 + 0.71}{1 - 0.71} = 5.89}$$



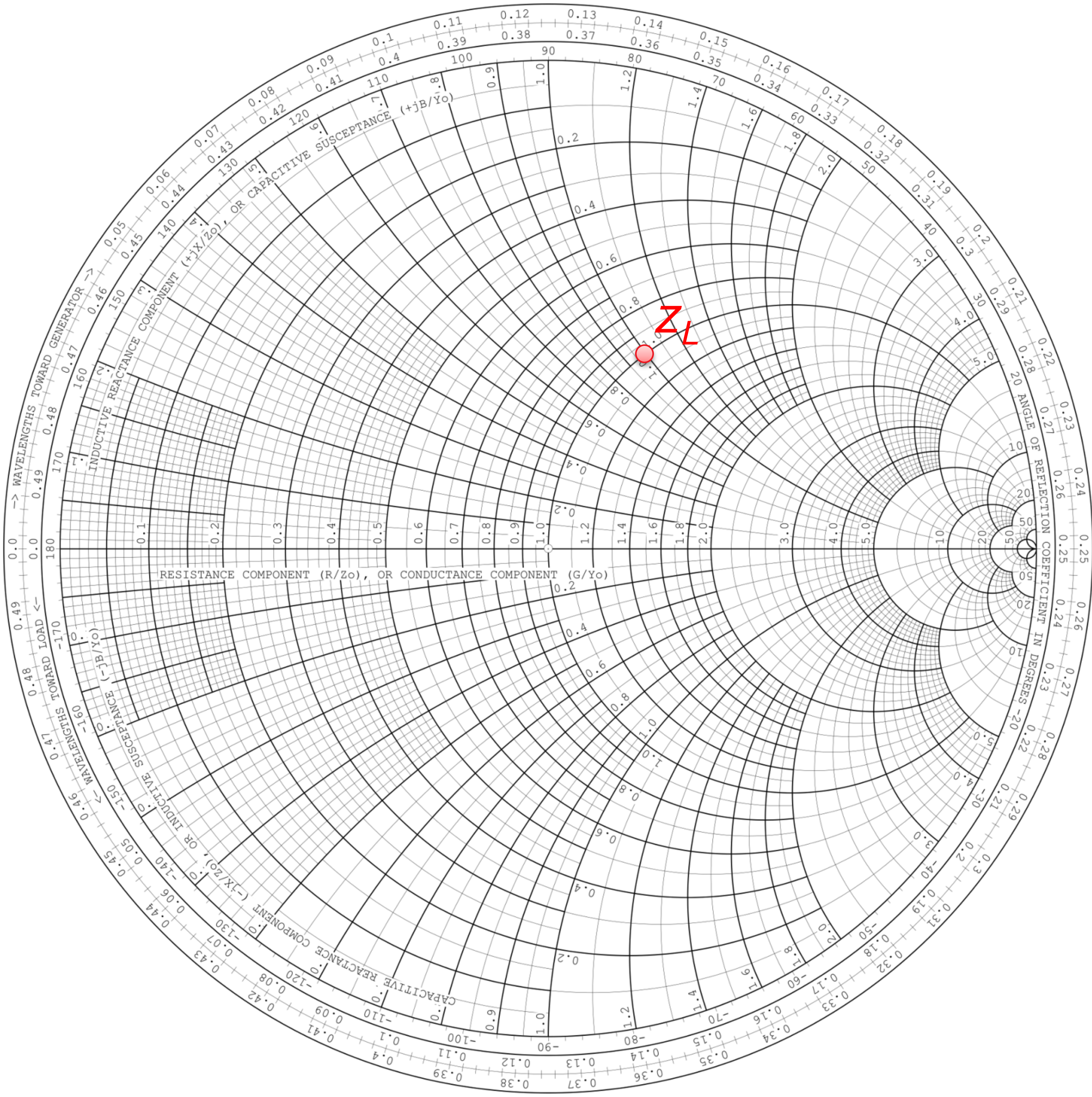
Esempio 2

Impedenza in ingresso con carico complesso

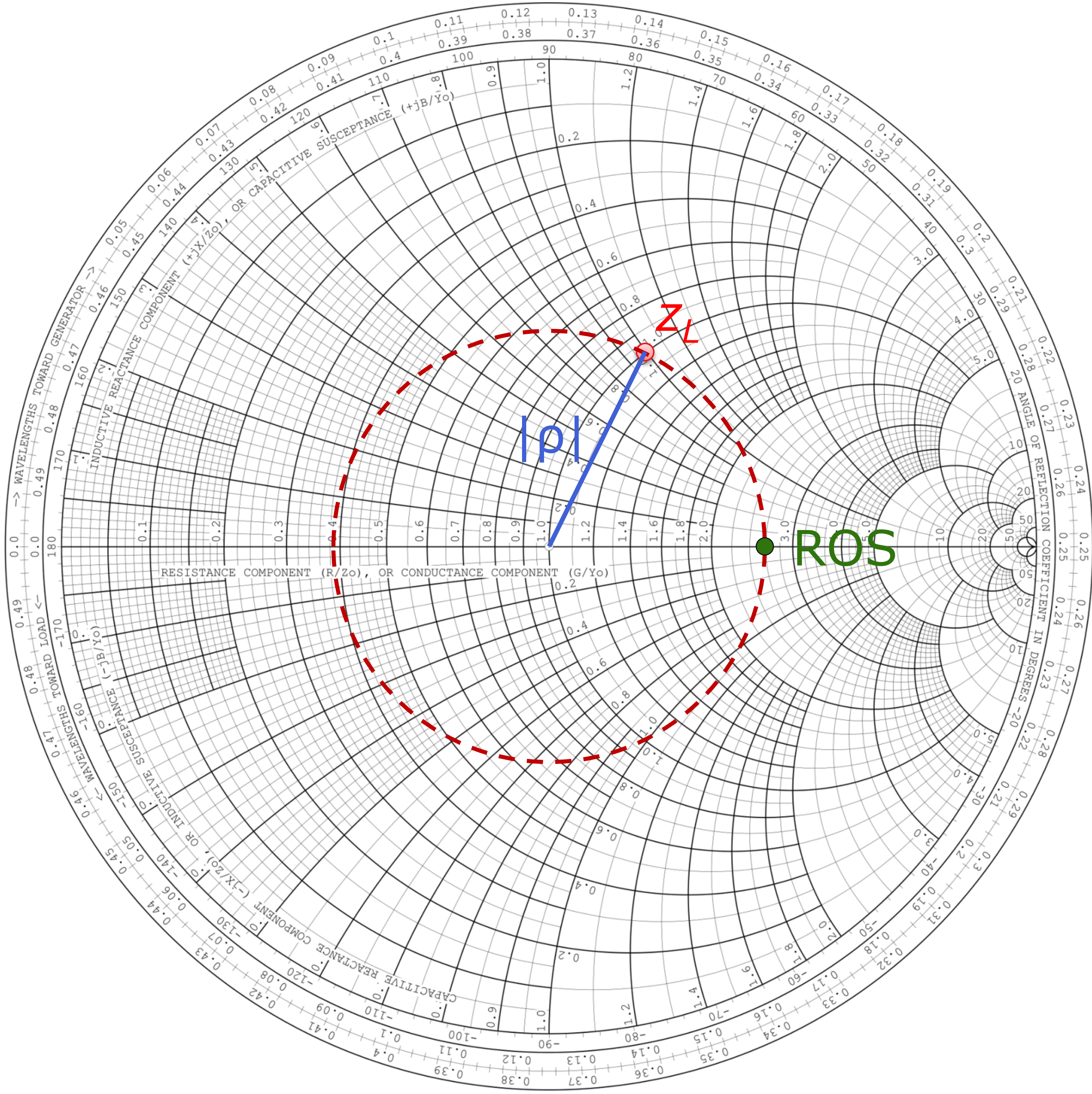
Si trovi **l'impedenza in ingresso** di una linea senza perdite di lunghezza **l = 1.014 m**, impedenza caratteristica **Z_0 = 100 Ω**, operante a **λ = 1.5 m**, chiusa su un carico **Z_L = (100+j100) Ω**

L'impedenza di carico normalizzata vale:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = 1 + j$$



Traccio la circonferenza a $|\rho|$ costante, centrata nell'origine e passante per z_L

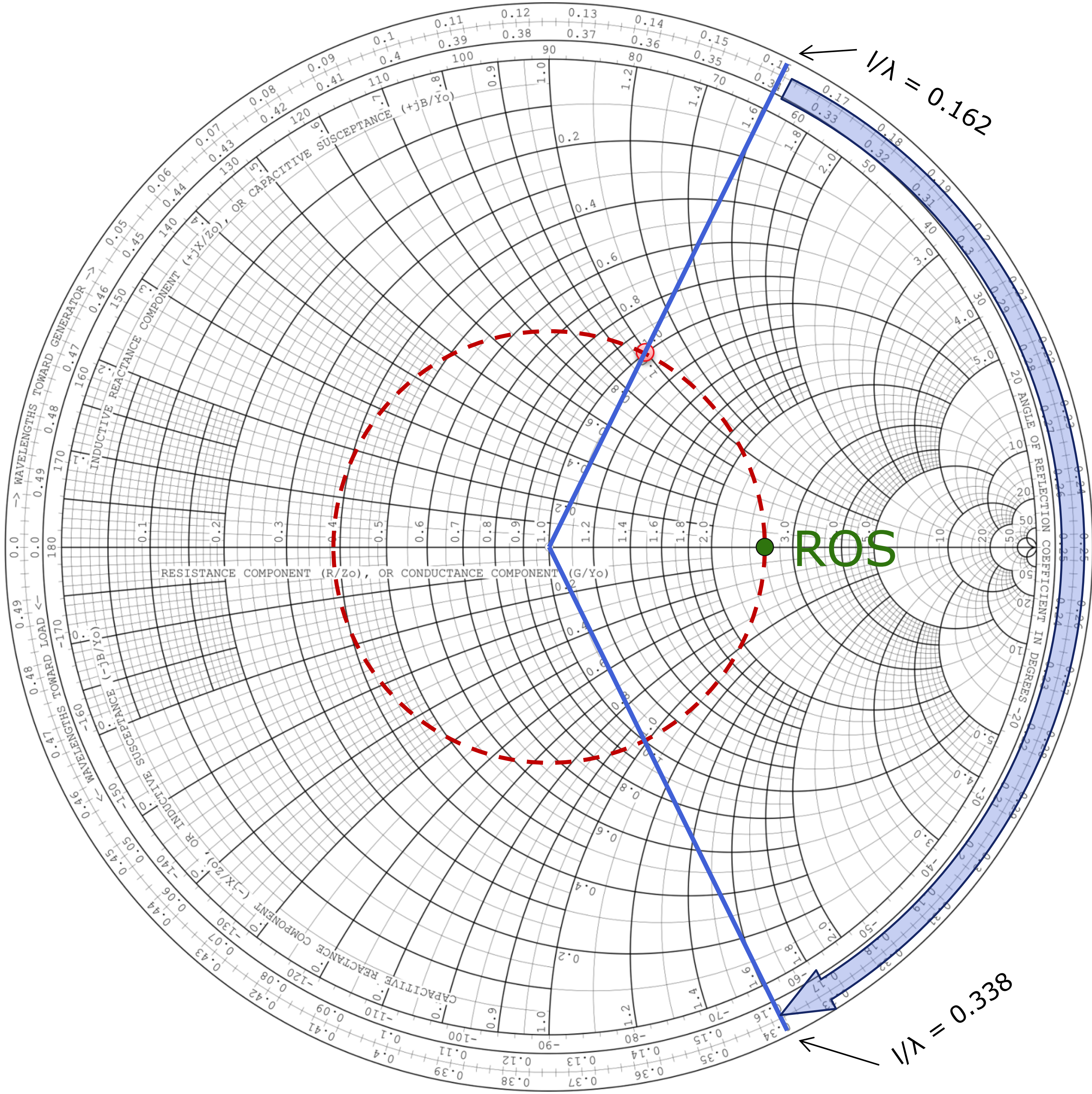


La porta in ingresso si trova a 1.014 m dal carico, ossia a

$$l = \frac{1.014}{1.5}\lambda = 0.676\,\lambda$$

Una rotazione completa sulla C.d.S. corrisponde a uno spostamento di 0.5λ.

Ruoto sulla circonferenza |ρ| in senso orario dell’angolo corrispondente a 0.176 λ, fermandomi a 0.338 λ sulla ghiera esterna



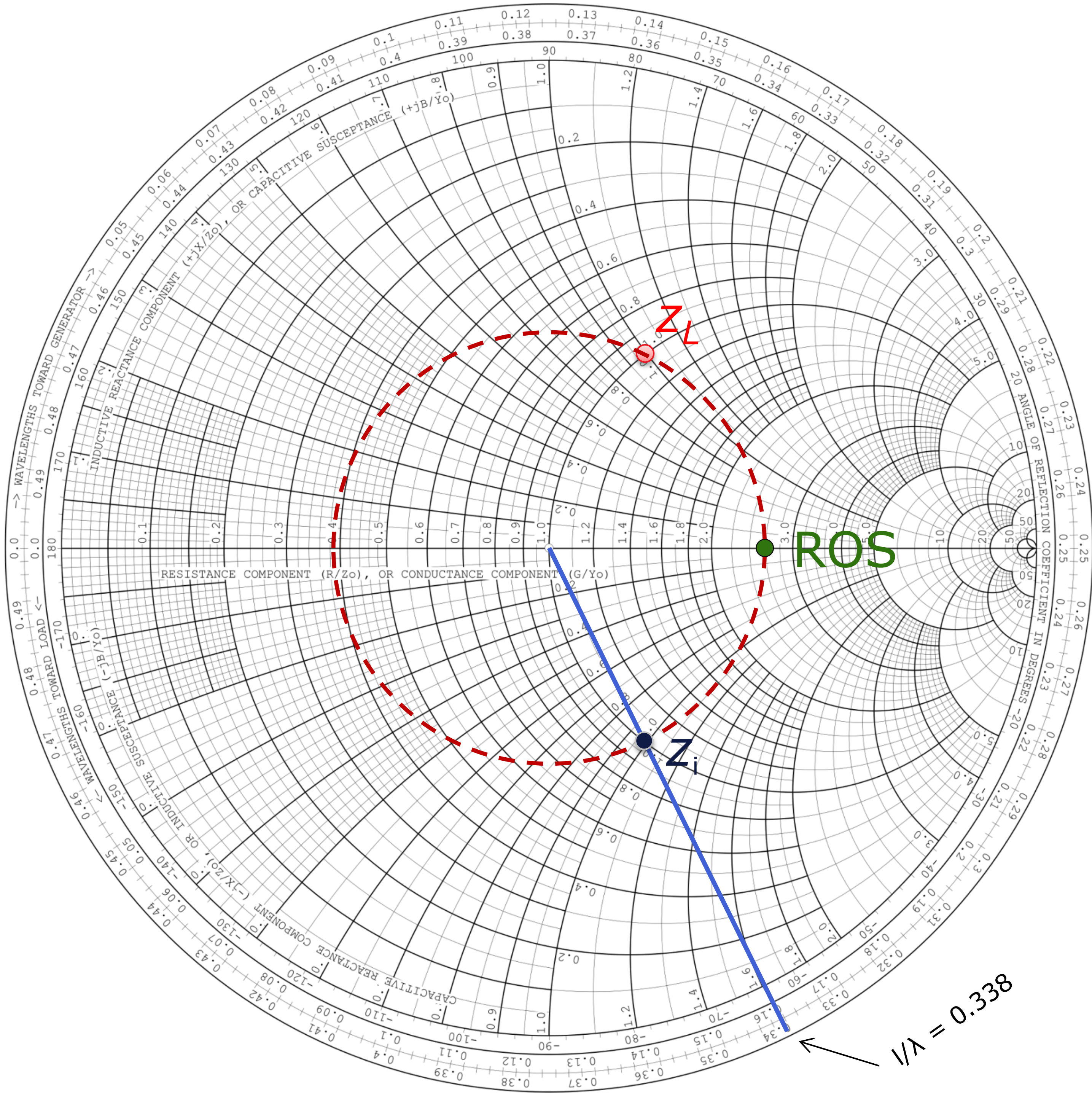
L'impedenza in ingresso normalizzata z_i è quella che si legge sul punto della circonferenza a $|\rho|$ costante appena trovato

Sulla C.d.S. si legge

$$\mathbf{z_i = 1-j}$$

corrispondente a

$$\boxed{\mathbf{Z_i = 100-j100\ \Omega}}$$



Esempio 3

Impedenza di carico

Una linea di trasmissione in polietilene (**ε_r=2.25**, **μ_r=1**) opera a una frequenza **ν = 20 MHz**. Sperimentalmente, vengono misurati i seguenti parametri: rapporto d'onda stazionaria **S = 3.6** e primo minimo di tensione a **l_{min} = 1.66 m** dal carico. Calcolare **l'impedenza di carico normalizzata** della linea.

Le rotazioni sulla carta di Smith sono espresse in termini di numero di lunghezze d'onda dal/verso il generatore. Per prima cosa, è quindi opportuno esprimere l_{min} in funzione di λ.

λ si ricava conoscendo ε_r, μ_r, ν:

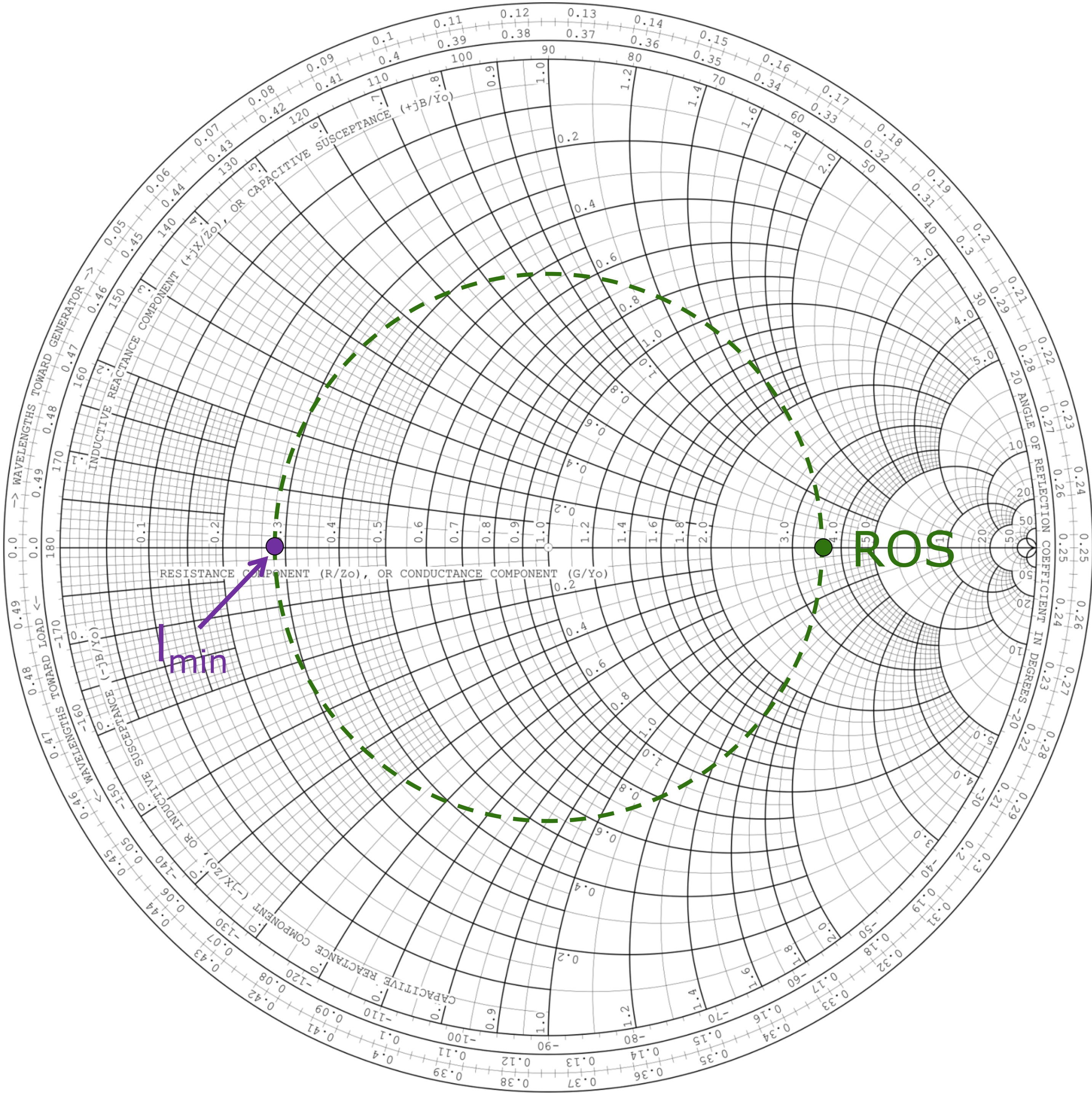
$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{c_0/n}{\nu} = \frac{c_0/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8/1.5}{20 \cdot 10^6} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{m}$$

Pertanto il primo minimo si trova a:

$$l_{min} = \frac{-1.66\ m}{10\ m}\lambda = -\mathbf{0.166}\ \boldsymbol{\lambda}$$

Traccio la circonferenza a $|\rho|$ costante che interseca l'asse orizzontale in ROS = 3.6

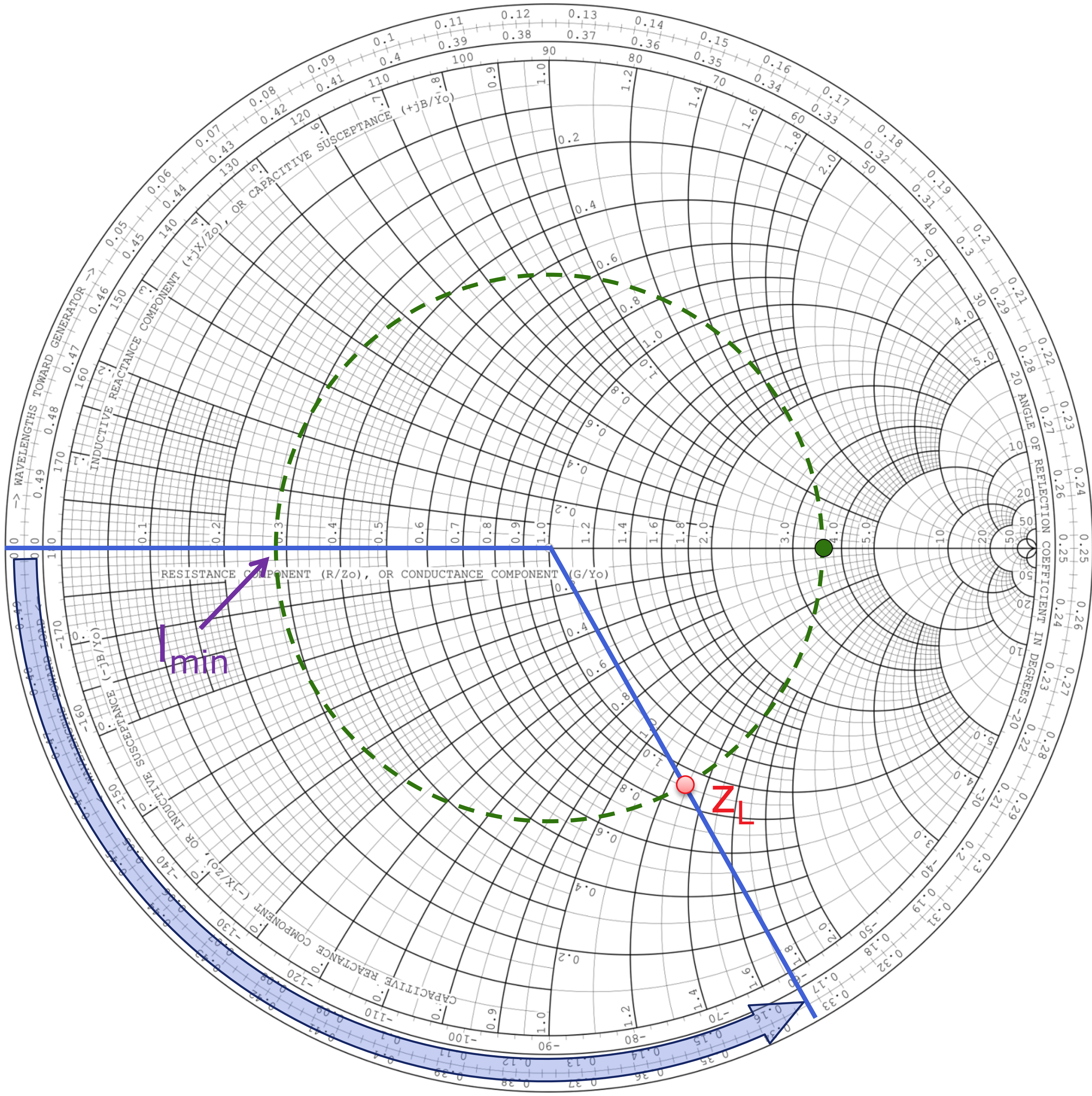
Il punto che corrisponde a l_{min} è quello in cui la circonferenza interseca il semiasse negativo



Partendo dal punto corrispondente a l_{min}, ruoto di 0.166λ verso il carico (antiorario)

Trovo z_L sulla curva a $|\rho|$ costante

$z_L \approx 0.9 - j1.3$



Esempio 4

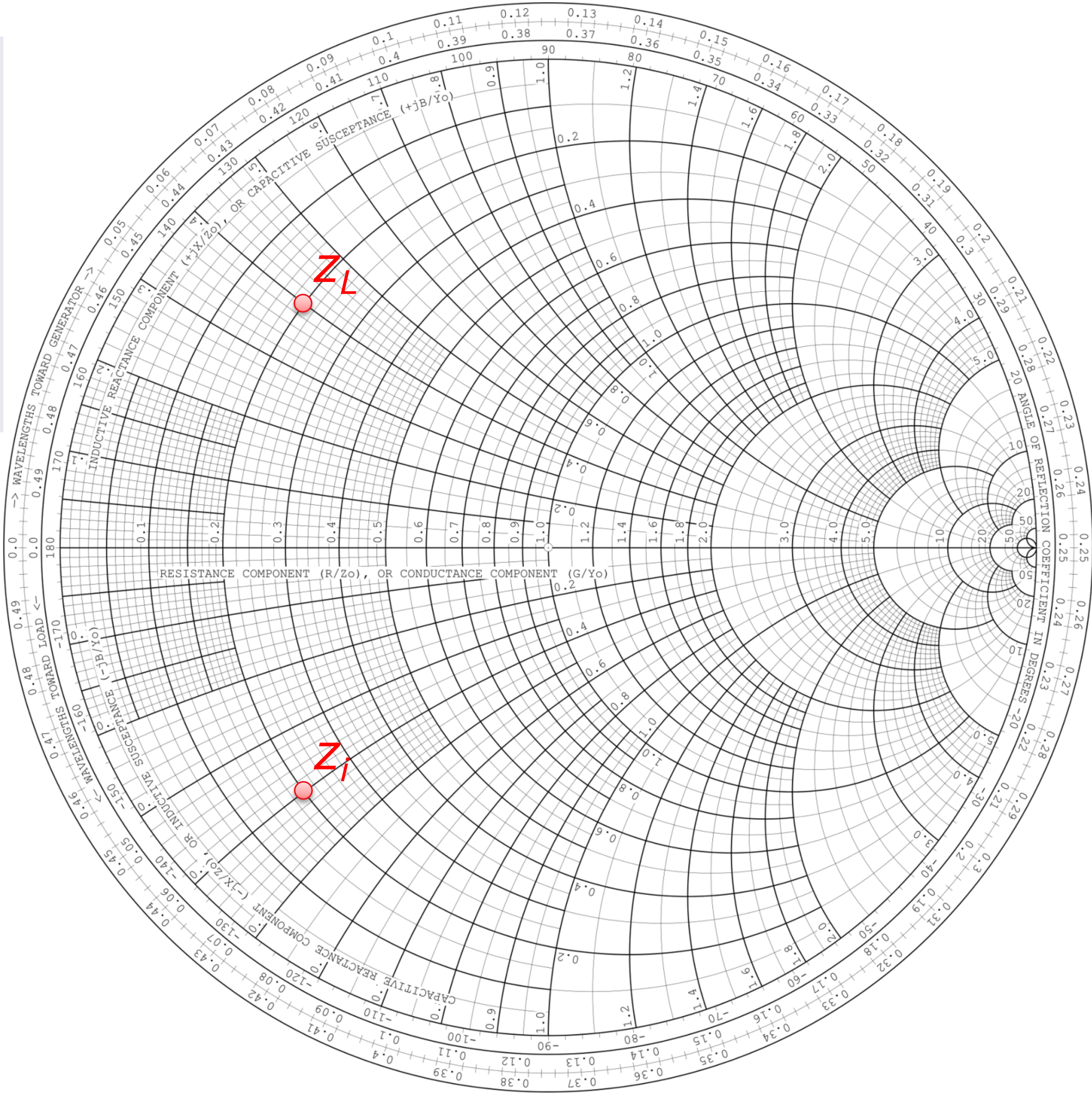
Lunghezza della linea

L'impedenza di ingresso di una linea è $\mathbf{Z_i = (10\text{-}j20)\ \Omega}$. Sapendo che la linea ha impedenza caratteristica puramente resistiva $\mathbf{R_0 = 50\ \Omega}$, è chiusa su un carico $\mathbf{Z_L = (10+j20)\ \Omega}$ e ha velocità di propagazione $\mathbf{v_p = 125\ m/\mu s}$ alla frequenza di **15 MHz**, calcolarne la **lunghezza**.

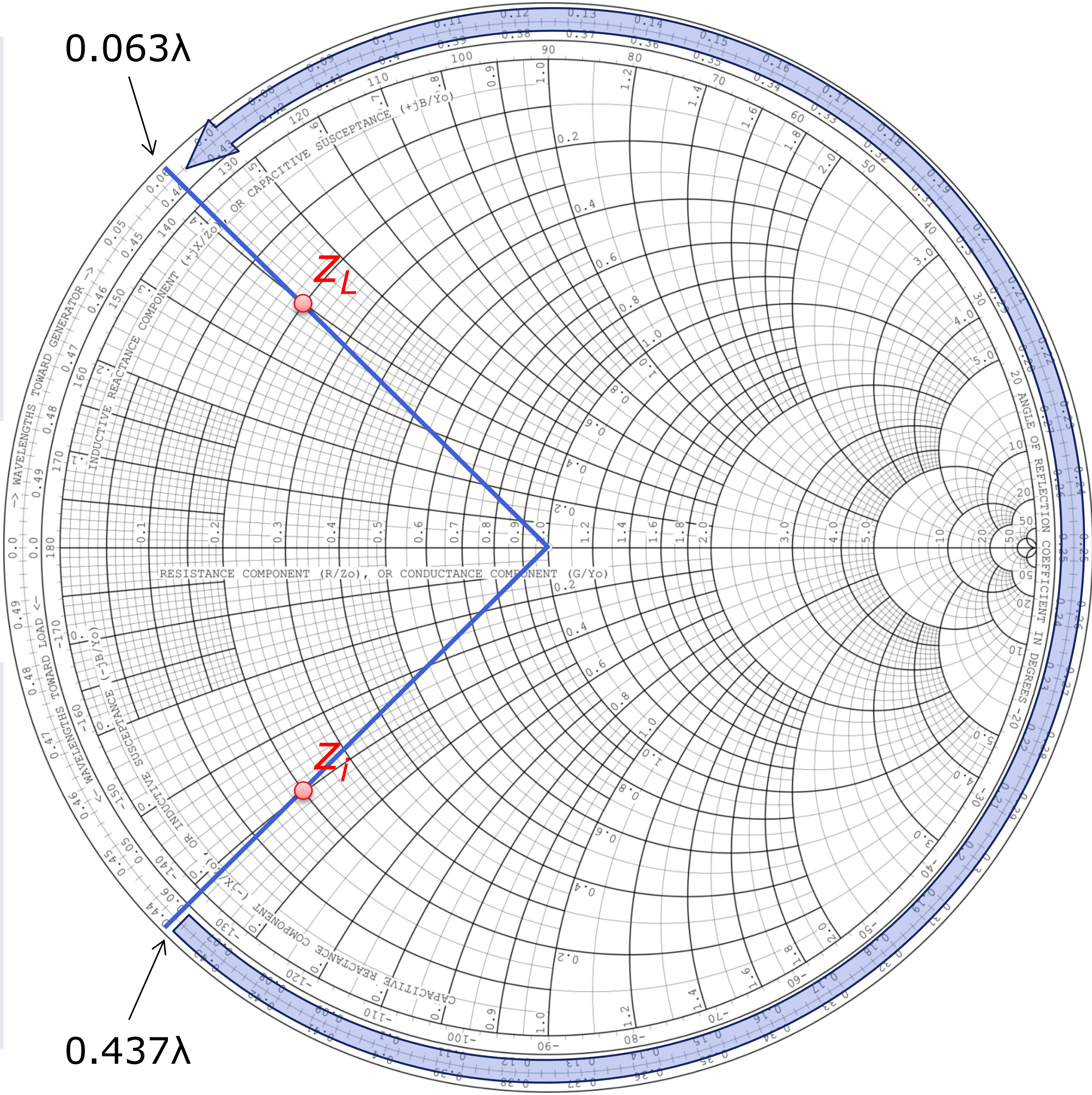
Le impedenze normalizzate di ingresso e di carico valgono:

$$z_i = \frac{10 - j20}{50} = 0.2 - j0.4$$

$$z_L = \frac{10 + j20}{50} = 0.2 + j0.4$$



Posso misurare la lunghezza della linea ruotando in verso antiorario dall’ingresso al carico e leggendo sulla ghiera esterna i valori corrispondenti.



La linea è lunga:

l = 0.437λ - 0.063λ

l = 0.374 λ

A MENO DI MULTIPLI DI λ/2

Per esprimere la lunghezza della linea in termini assoluti è sufficiente esplicitare la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{125\ m/\mu s}{20 \cdot 10^6\ 1/s} = \frac{125 \cdot 10^6\ m/s}{20 \cdot 10^6\ 1/s} = \mathbf{8.33\ m}$$

Pertanto la lunghezza (minima) della linea è:

$$\boxed{l_{min} = 0.374 \cdot 8.33\ m = \mathbf{3.12\ m}}$$

Alla luce dei dati disponibili, la linea potrebbe avere lunghezza pari a (3.12 + k · 4.165) m, con k intero positivo.

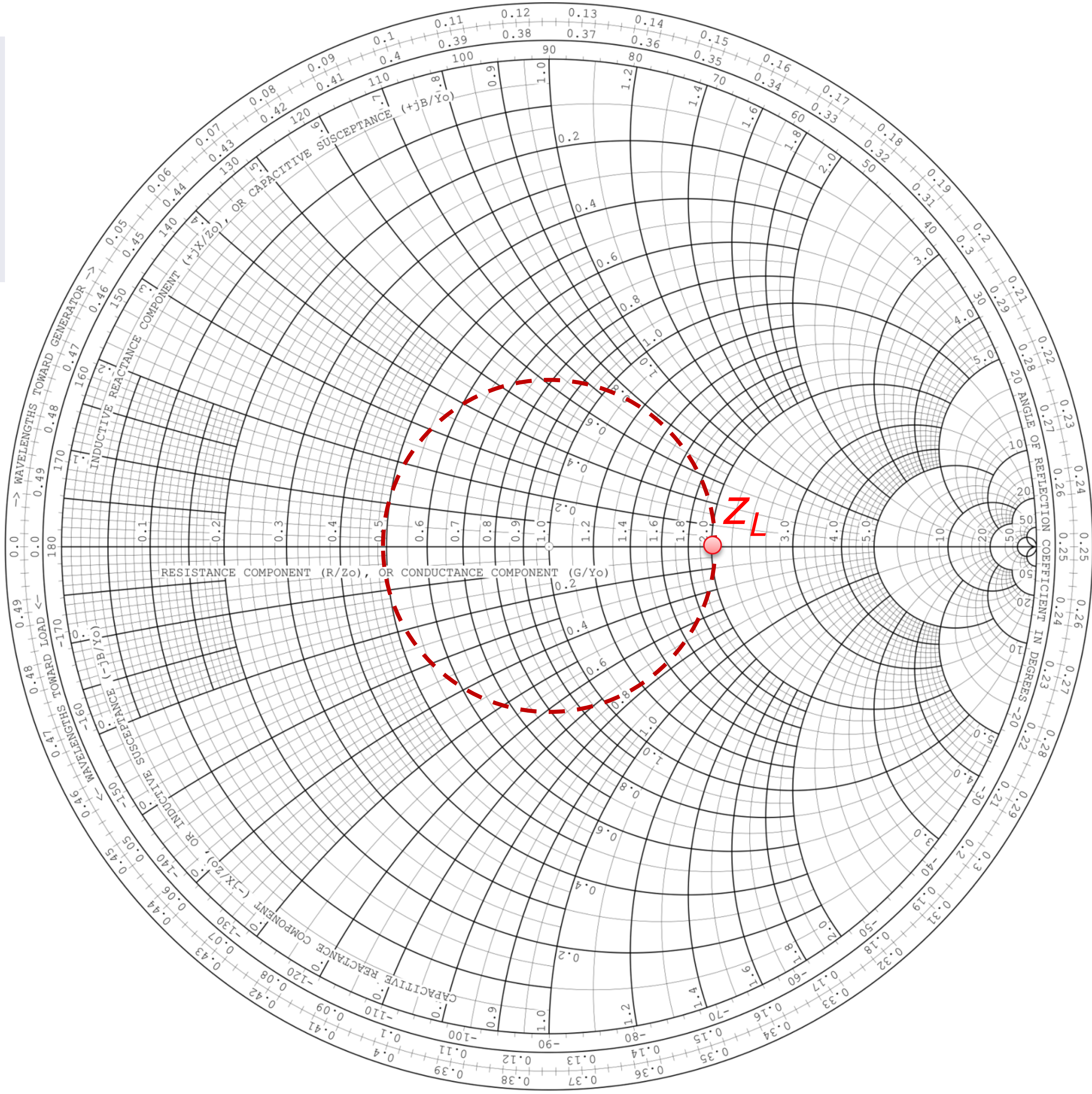
Esempio 5

Impedenza al variare della frequenza

Si calcoli, utilizzando la carta di Smith, **l'impedenza di ingresso** di una linea di trasmissione **lunga 75 cm** con $\mathbf{Z_0 = 70\ \Omega}$, terminata su un carico $\mathbf{Z_L = 140\ \Omega}$ a **50**, **100**, **150** e **200 MHz**. Si assuma che la velocità di propagazione sia pari alla velocità della luce nel vuoto.

L’impedenza di carico normalizzata vale:

$$z_L = \frac{140}{70} = 2$$



Per v = 50 MHz, la lunghezza d’onda λ vale

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{50 \cdot 10^6} = 6\ m$$

La lunghezza della linea è quindi pari a

$$l = \frac{0.75}{6} = 0.125\ \lambda$$

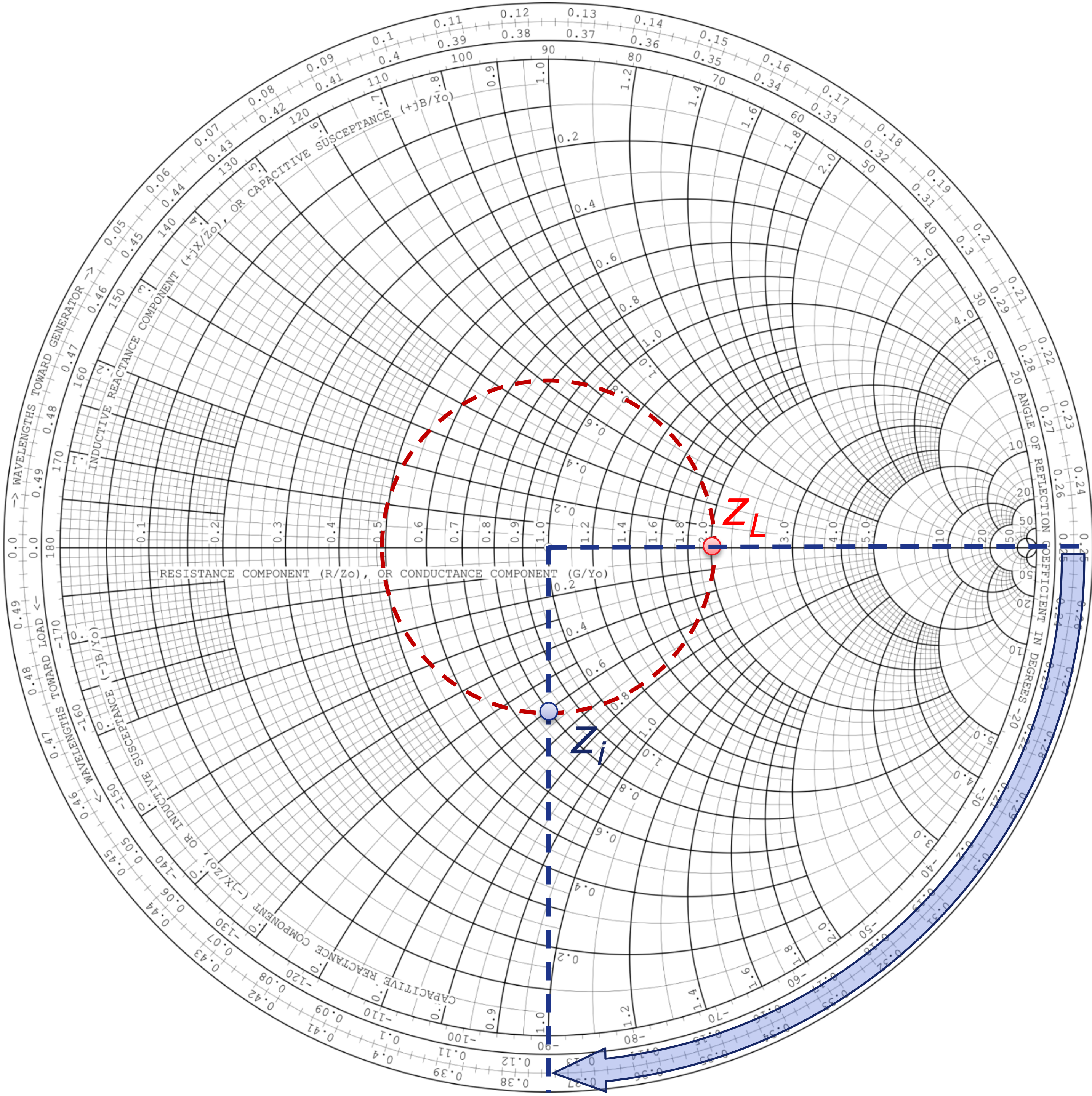
Mi sposto sulla circonfrenza a |ρ| costante in senso orario dell’angolo corrispondente

Leggo z_i nel punto corrispondente

$$\mathbf{z_i = 0.8 - j0.6}$$

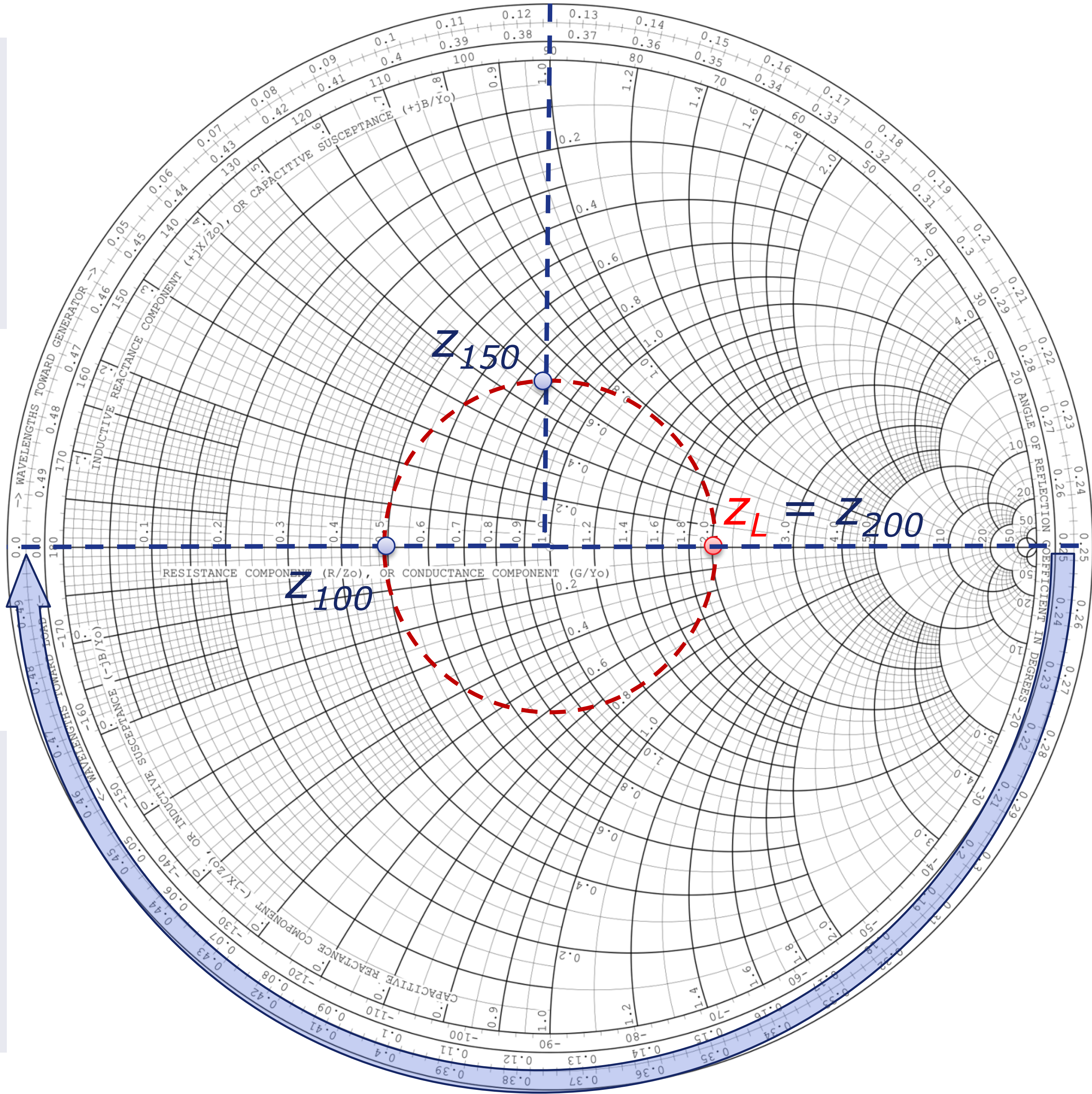
Ovvero

$$\boxed{\mathbf{Z_i = (56 - j42)\ \Omega}}$$



Alle altre frequenze, la lunghezza della linea vale:

l(100 MHz) = 0.25 λ
l(150 MHz) = 0.375 λ
l(200 MHz) = 0.5 λ



Le corrispondenti impedenze di ingresso sono:

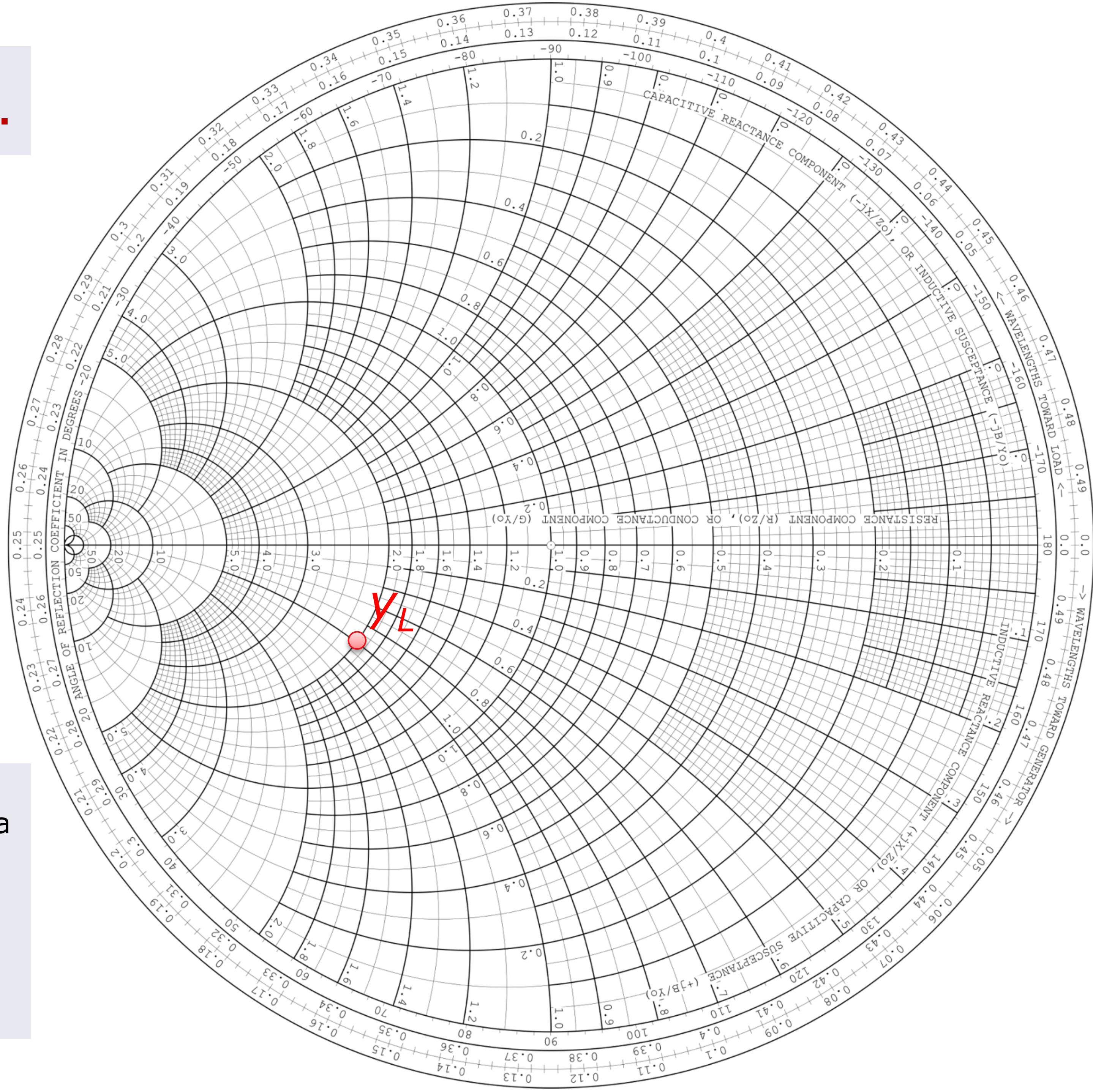
$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{z_{100} = 0.5} \\ \mathbf{z_{150} = 0.8 + j0.6} \\ \mathbf{z_{200} = 2} \end{array}}$

Esempio 6

Carta delle ammettenze

Una linea di trasmissione **lunga 50 cm** e con $\mathbf{Z_0 = 50\ \Omega}$ è chiusa su un carico di ammettenza $\mathbf{Y_L = (0.04 + j0.02)\ 1/\Omega}$. Calcolare **l'ammettenza in ingresso** normalizzata a una frequenza di **200 MHz**. Si ipotizzi una velocità di propagazione pari alla velocità della luce nel vuoto.

Utilizzo la carta delle ammettenze.



L'ammettenza caratteristica della linea vale Y_0 = 0.02 Ω.

L'ammettenza di carico normalizzata è quindi:

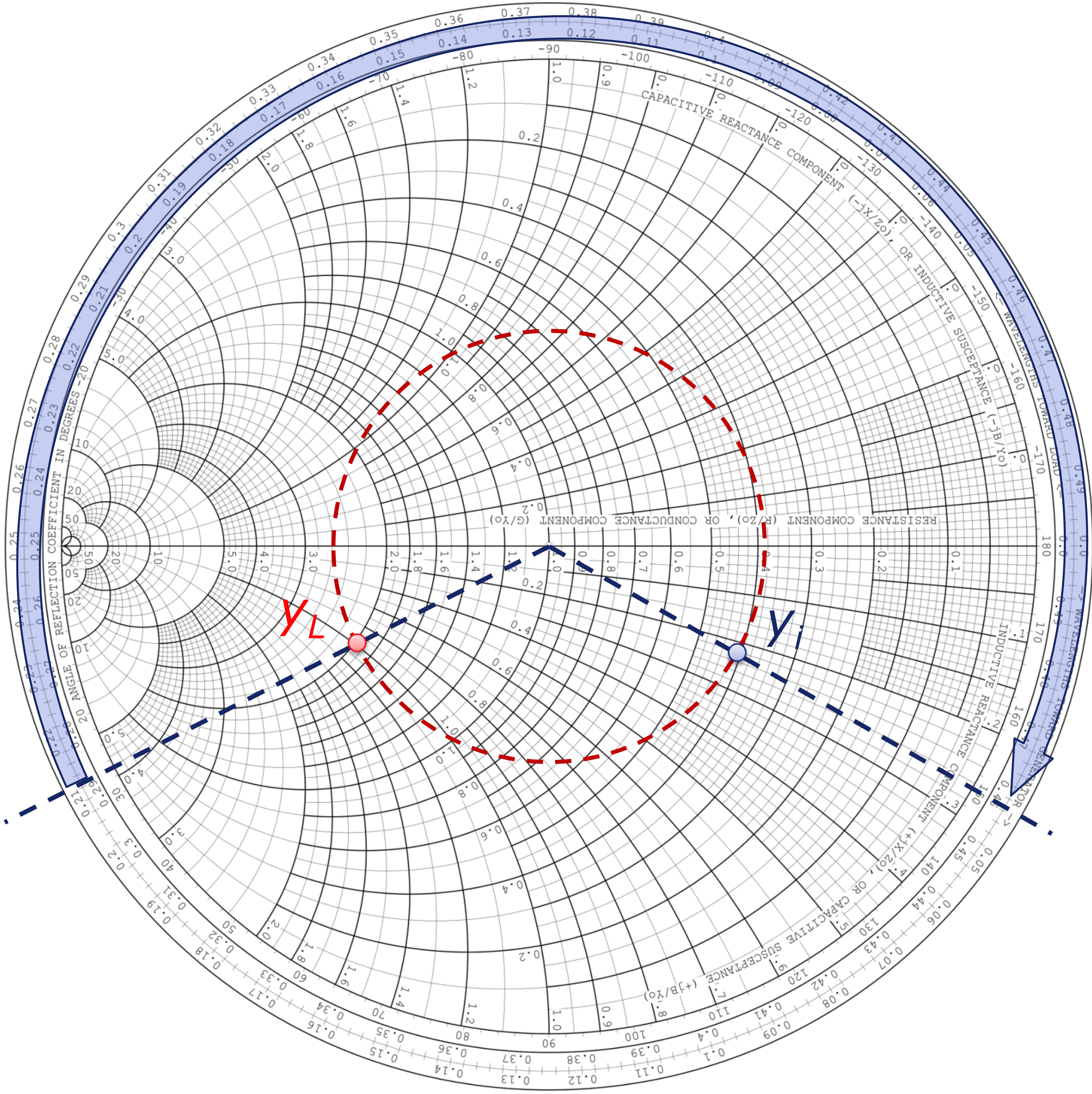
$\mathbf{y_L = 2 + j1}$

La lunghezza d'onda a 200 MHz è pari a 1.5 m.

L'ammettenza in ingresso si trova ruotando sulla circonferenza a |ρ| costante di una quantità l/λ pari a 0.33 λ.

Sulla C.d.S. individuo

$$\boxed{\mathbf{y_i = 0.41 + j0.25}}$$



ADATTAMENTO

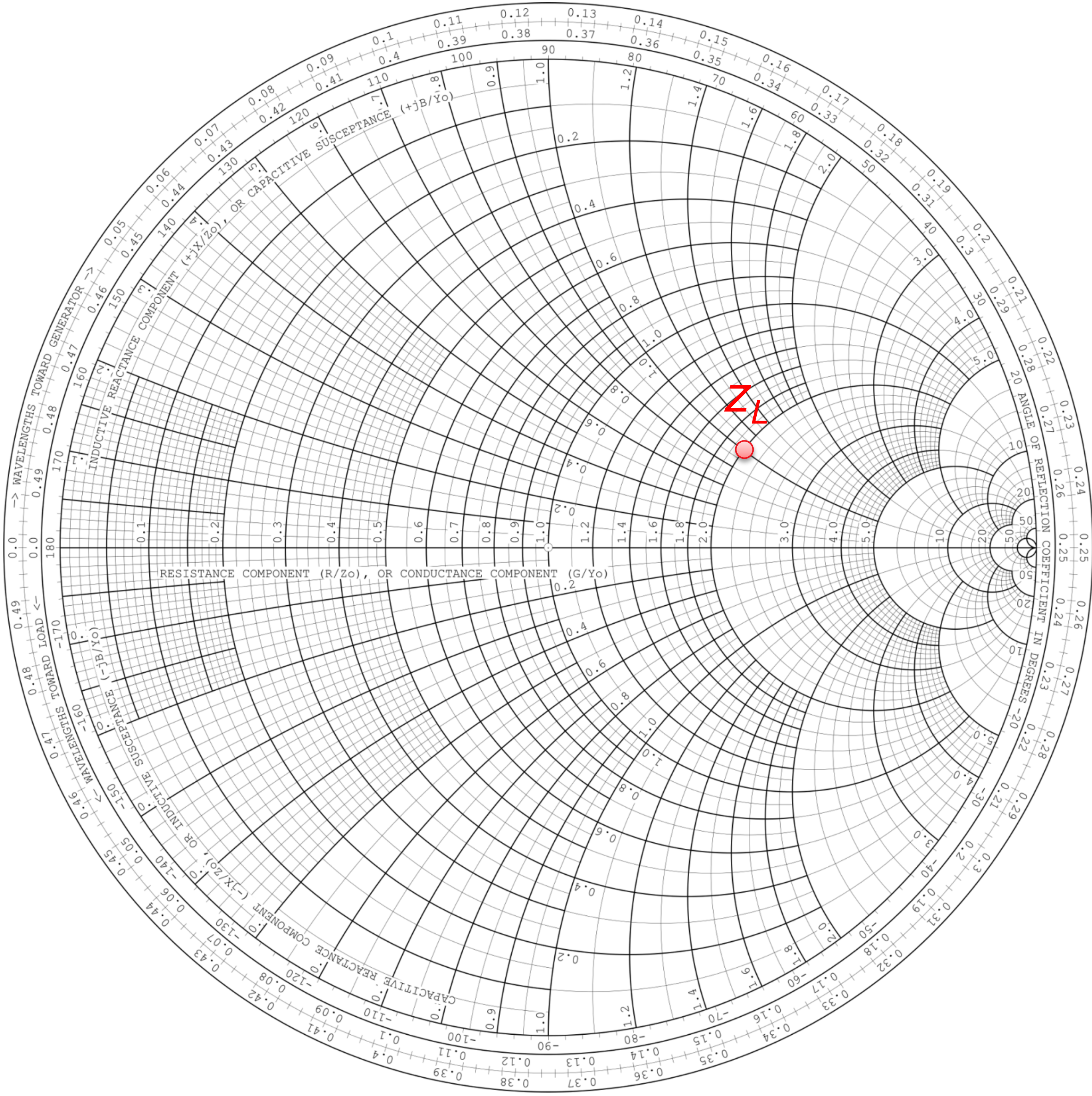
Adattatore a λ/4

Si consideri una linea di trasmissione priva di perdite, con impedenza caratteristica $\mathbf{Z_0 = 50\ \Omega}$, chiusa su un carico $\mathbf{Z_L = (100 + j50)\ \Omega}$. Si determinino le **condizioni di adattamento** mediante un **adattatore a λ/4**.

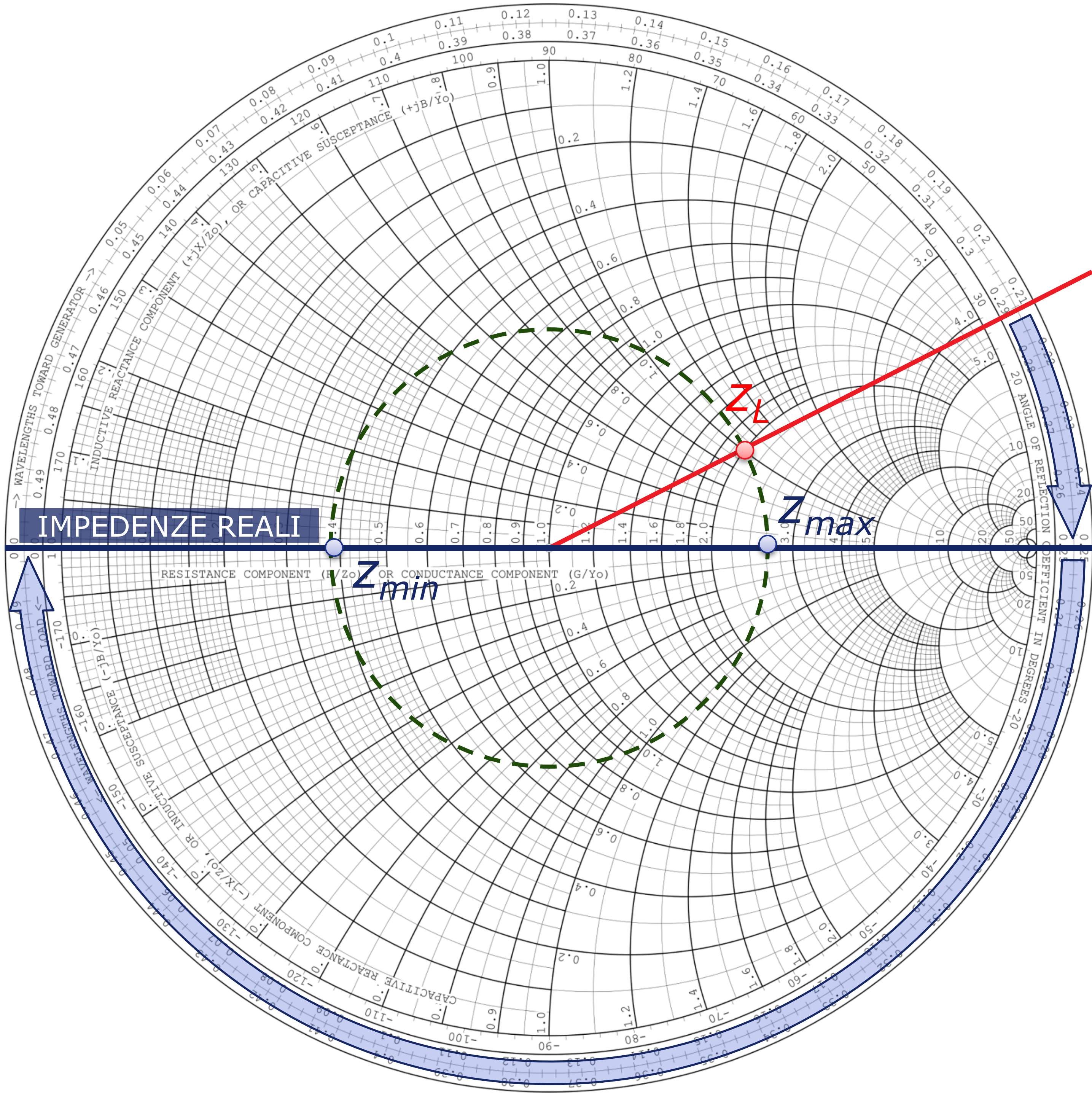
L'impedenza di carico normalizzata vale:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = 2 + j$$

L'adattatore λ/4 può essere utilizzato per adattare un carico puramente reale. Dovrò collocarlo in un punto opportuno della linea nel quale l'impedenza è reale.



Mi sposto sulla curva a |ρ| costante in direzione del generatore, ruotando sulla carta di Smith in senso orario, fino a intercettare l’asse delle impedenze reali



Individuo i due punti a impedenza z_{max} e z_{min}, che distano rispettivamente d_{max} e d_{min} dal carico

Dalla lettura della ghiera esterna della carta, ottengo direttamente la distanza a cui collocare gli adattatori:

$$d_{max} = 0.287\,\lambda - 0.25\,\lambda = 0.037\,\lambda$$
$$d_{min} = 0.037\,\lambda + 0.25\,\lambda = 0.287\,\lambda$$

E ricavo le corrispondenti impedenze degli adattatori:

$$Z_1 = \sqrt{(z_{max} \cdot Z_0)Z_0} = \sqrt{(2.62 \cdot 50) \cdot 50} = 81\,\Omega\ @\ d_{max}$$
$$Z_2 = \sqrt{(z_{min} \cdot Z_0)Z_0} = \sqrt{(0.38 \cdot 50) \cdot 50} = 31\,\Omega\ @\ d_{min}$$

Pertanto il carico può essere adattato alla linea mediante un'adattatore λ/4:

- di impedenza caratteristica **81 Ω**, posto a **0.037 λ + nλ/2** dal carico
- oppure di impedenza caratteristica **31 Ω**, posto a **0.287 λ + nλ/2** dal carico

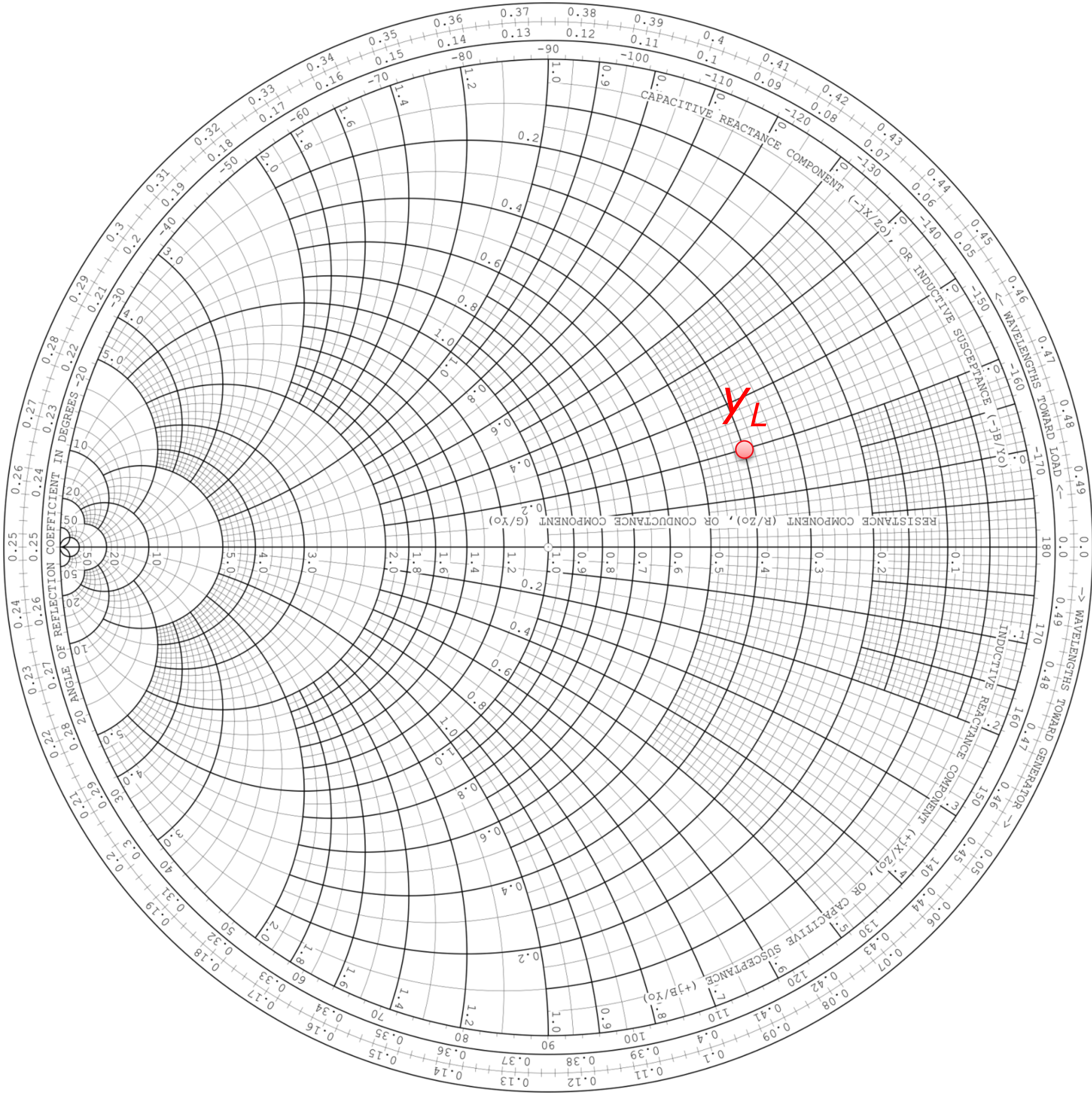
Stub in parallelo

Si consideri una linea di trasmissione priva di perdite, con impedenza caratteristica $\mathbf{Z_0 = 50\ \Omega}$, chiusa su un carico $\mathbf{Z_L = (100 + j50)\ \Omega}$. Si determinino le **condizioni di adattamento** mediante un adattatore a **stub in parallelo**.

Poichè lavoriamo con un parallelo, è più pratico considerare la carta delle ammettenze.

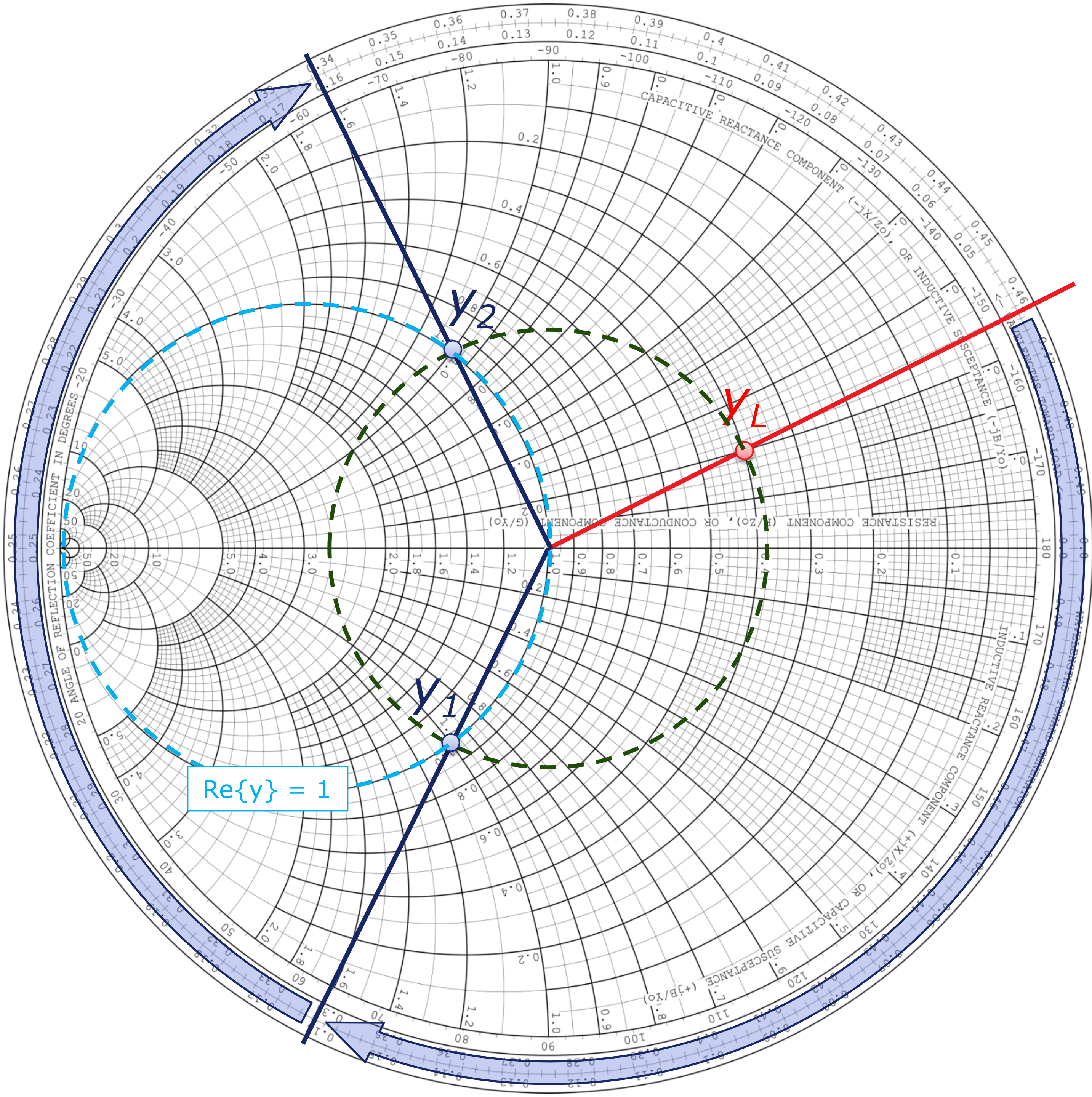
Il carico vale $y_L = \frac{1}{z_L/Z_0} = 0.4 - j0.2$

Lo stub in parallelo può fornire solo una pura suscettanza, quindi va inserito in un punto della linea in cui si veda un'ammettenza normalizzata pari a **1+jb o 1-jb**



Mi sposto sulla curva a |ρ| costante in direzione del generatore, ruotando sulla carta di Smith in senso orario, fino a intercettare la circonferenza corrispondente a ***Re{y(l)} = 1***

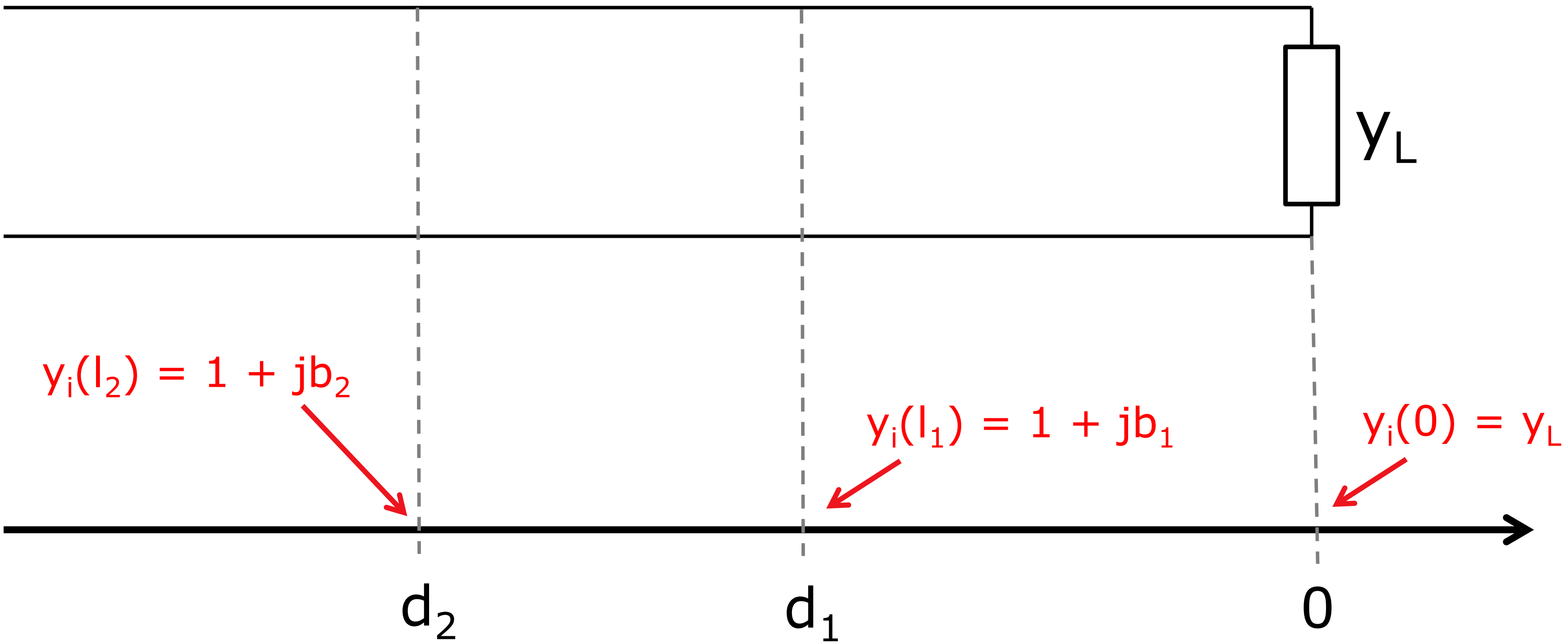
Individuo due punti ad ammettenza normalizzata y_1 e y_2

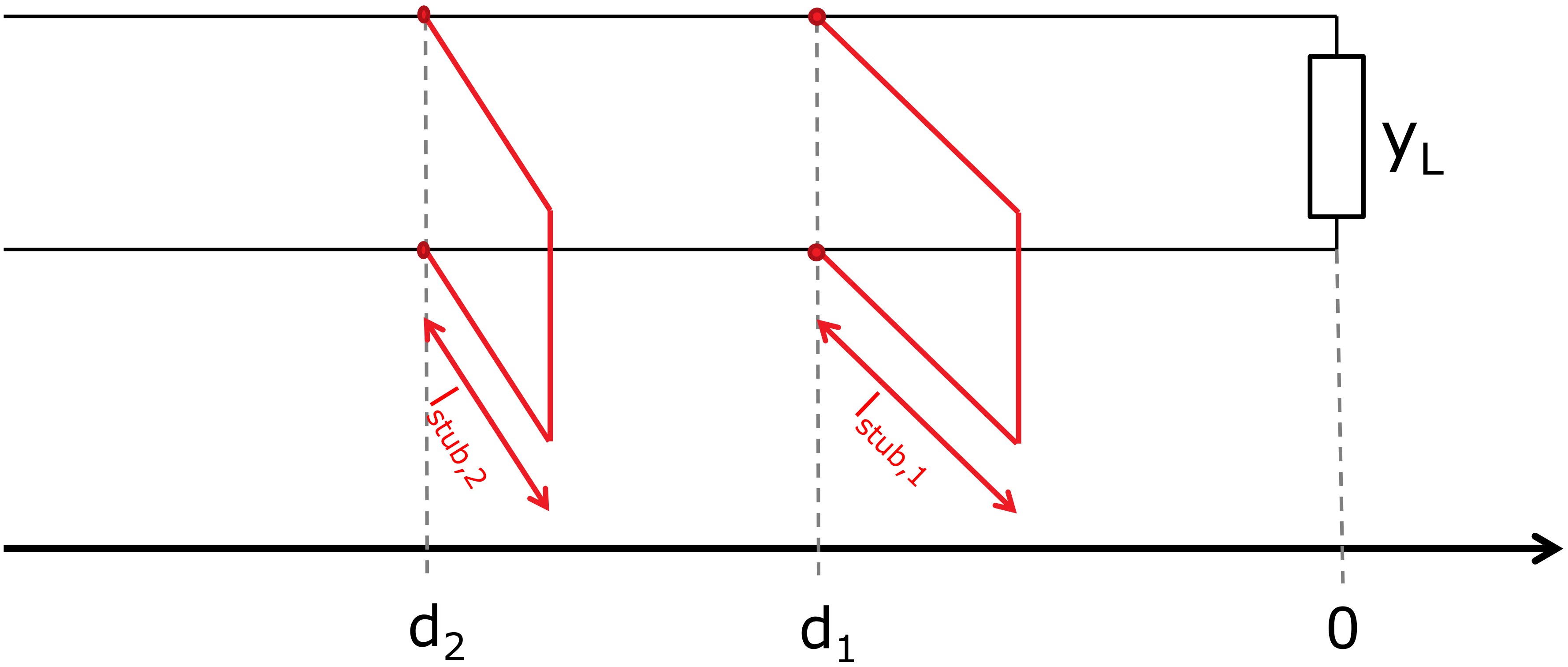


Dalla lettura della ghiera esterna della carta, ottengo direttamente la distanza a cui collocare gli adattatori:

$$d_1 = 0.287\,\lambda - 0.25\,\lambda + 0.162\,\lambda = 0.199\,\lambda$$

$$d_2 = 0.037\,\lambda + 0.25\,\lambda + 0.088 = 0.375\,\lambda$$

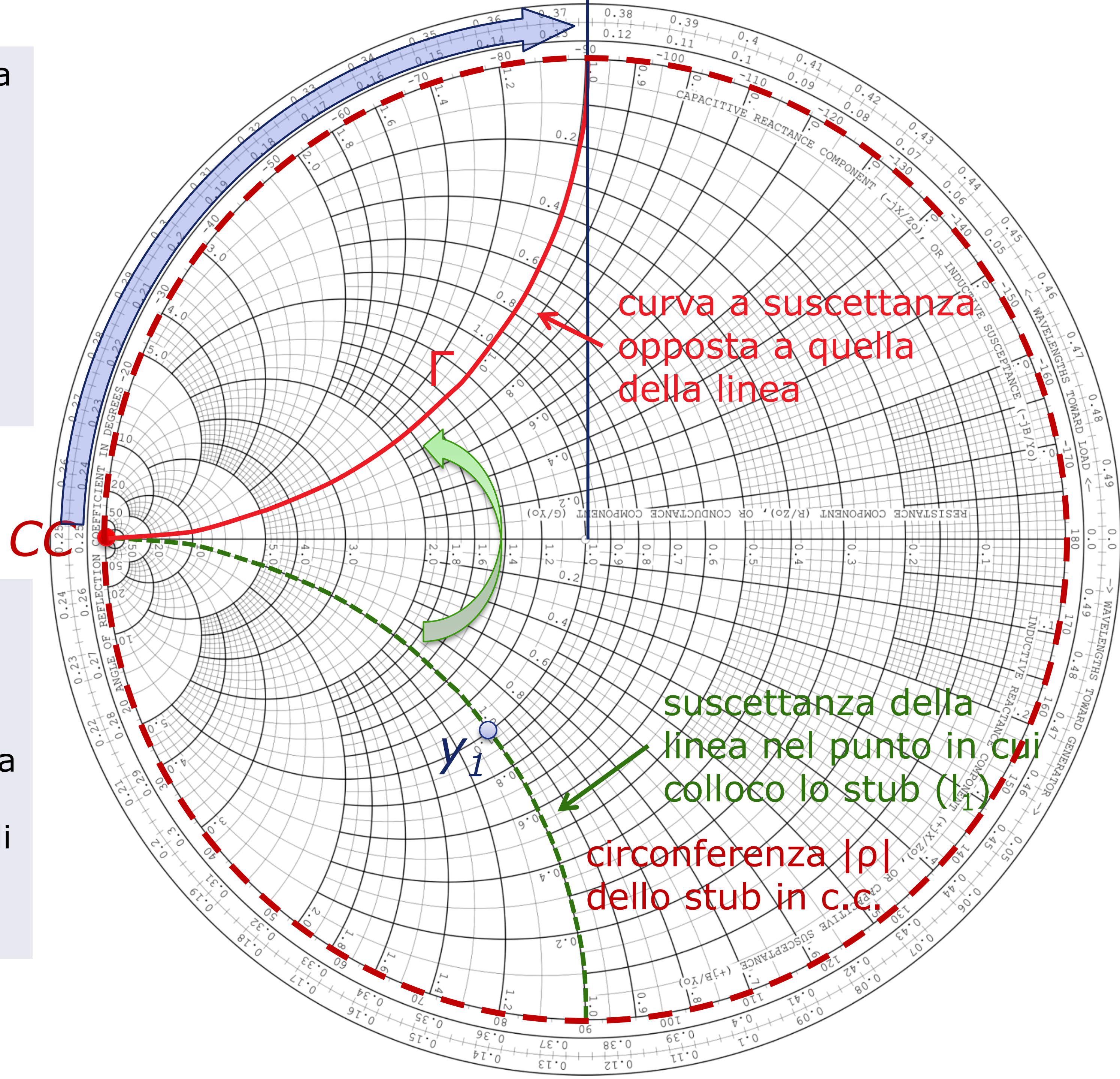




Per adattare il carico posso collocare uno stub in c.c. di **lunghezza $l_{stub,1}$ a distanza d_1**, OPPURE uno stub in c.c di **lunghezza $l_{stub,2}$ a distanza d_2**

Scelgo la lunghezza dello stub in modo che fornisca una **suscettanza opposta a quella della linea in quel punto**, in modo da annullare la suscettanza totale.

Per determinare la lunghezza dello stub in CC, individuo la curva Γ a suscettanza opposta a quella del punto considerato (es. y_1)



Ottengo la lunghezza dello stub misurando sulla ghiera esterna la distanza dal punto di C.C. dell'intersezione di Γ con la ghiera esterna

Dalla lettura della ghiera esterna della carta, ottengo direttamente le lunghezze degli stub:

$$l_{stub,1} = 0.125\,\lambda$$
$$l_{stub,2} = 0.375\,\lambda$$

La linea può quindi essere adattata

- Con uno stub in c.c. di **lunghezza 0.125 λ + nλ/2** posto **a distanza 0.199 λ + nλ/2** dal carico
- oppure con uno stub in c.c. di **lunghezza 0.375 λ + nλ/2** posto **a distanza 0.375 λ + nλ/2** dal carico

La lunghezza dello stub può essere facilmente ricavata a partire dalle formule per il calcolo dell'impedenza in ingresso di una linea in c.c.:

$$y_i = -j\, cotg(\beta l) = -j cotg\left(2\pi \frac{l_{stub}}{\lambda}\right)$$

da cui

$$\frac{l_{stub}}{\lambda} = \frac{arctan(1/y_i)}{2\pi}$$

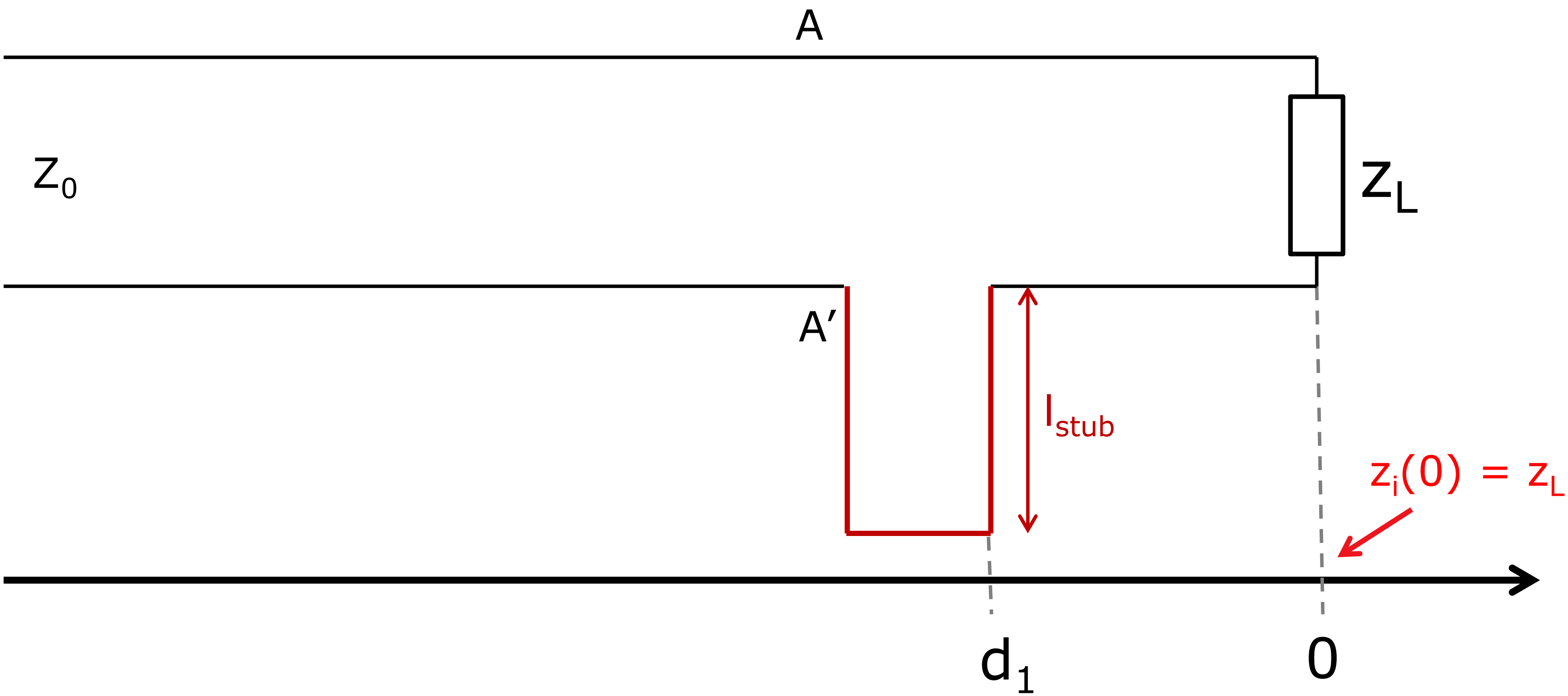
Sostituendo a y_i i valori di suscettanza opposti a quelli della linea nei punti in cui sono collocati gli stub, si ricava:

$$l_{stub,1} = 0.125\, \lambda$$

$$l_{stub,2} = 0.375\, \lambda$$

Stub in serie

Una linea di trasmissione a **50 Ω**, operante a **100 MHz**, è chiusa su un carico $\mathbf{Z_L = (100+j100)\ \Omega}$. Si determinino le **condizioni di adattamento** usando uno stub in serie, supponendo che il materiale dielettrico che della linea abbia $\boldsymbol{\varepsilon_r = 4.2}$.



Stub e carico sono in serie. Lavoro con la carta delle impedenze.

Lo stub, essendo realizzato con un corto-circuito, può adattare solo la parte immaginaria del carico, e deve pertanto essere collocato a una distanza d_1 dal carico tale per cui l'impedenza in ingresso in quel punto sia puramente reale.

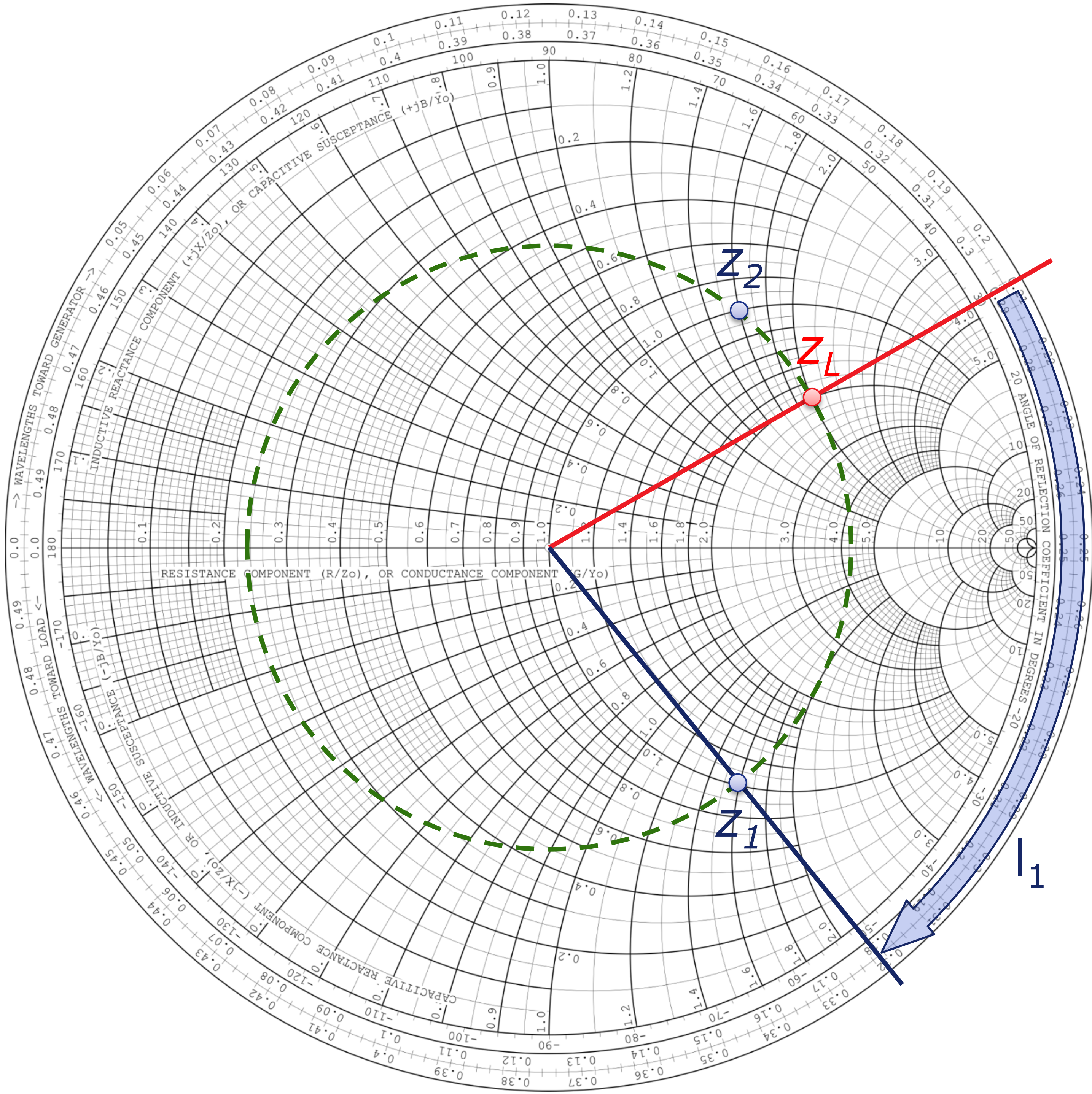
L’impedenza di carico normalizzata vale:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = 2+2j$$

Per ottenere adattamento con uno stub in serie, devo portarmi a una distanza dal carico tale da vedere un’impedenza in ingresso

$$\mathbf{z_i = 1 + jx}$$

mi sposto di un’arco opportuno sulla circonferenza a |ρ| costante



Leggo direttamente sulla C.d.S. le distanze dal carico alle quali trovo le impedenze in ingresso z_1 e z_2

z_1: $d_1 = 0.322\lambda - 0.209\lambda = 0.113\lambda$

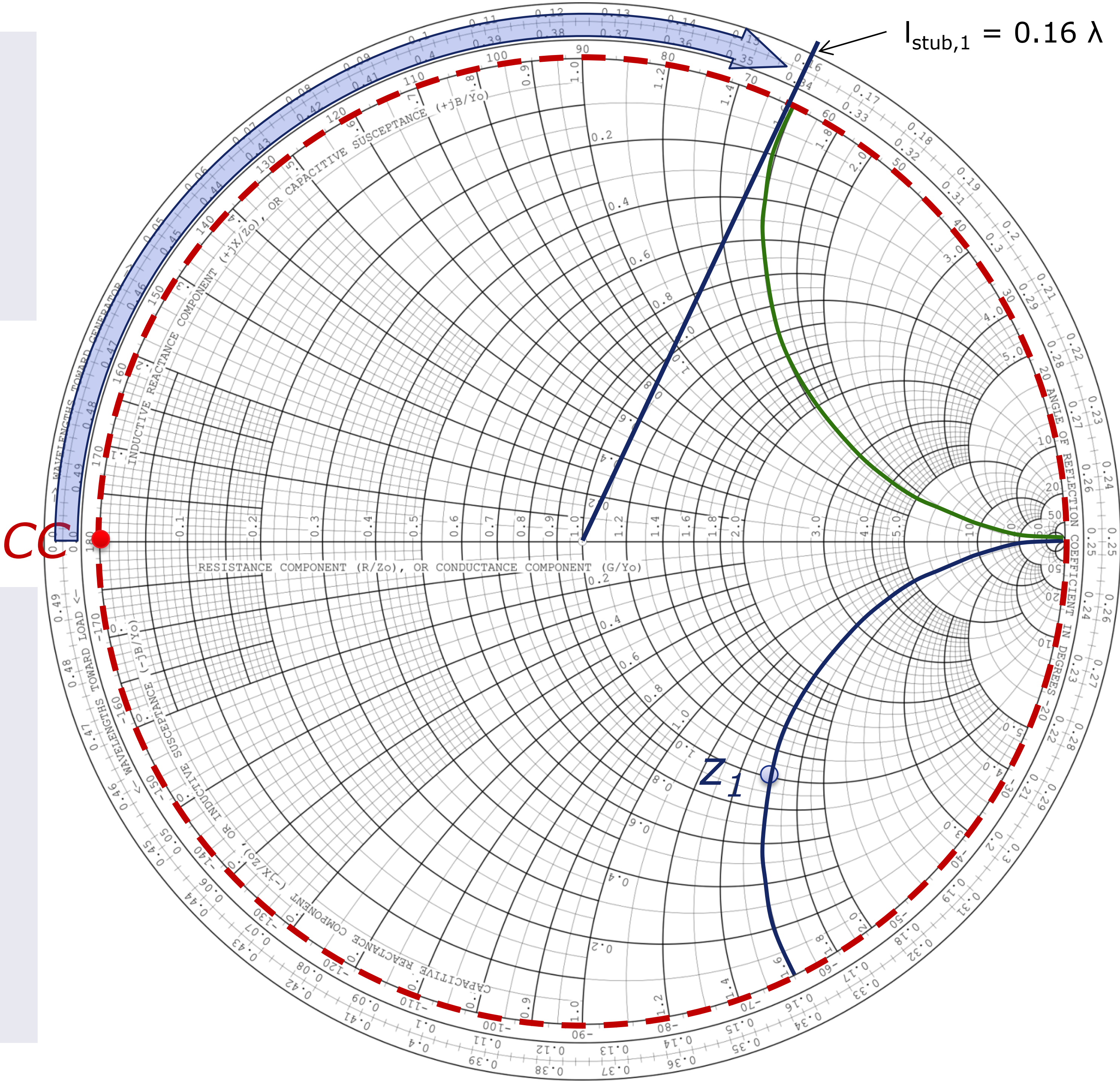
z_2: $d_2 = 0.041\lambda + 0.25\lambda + 0.179\lambda = 0.47\lambda$

Posso collocare lo stub a distanza d_1 o d_2 dal carico (a meno di multipli di $\lambda/2$).

Scelta la distanza, devo ricavare la lunghezza dello stub affinchè fornisca una reattanza opposta a quella della linea in quel punto.

Per il punto z_1 passa la curva a reattanza x=-1.6.

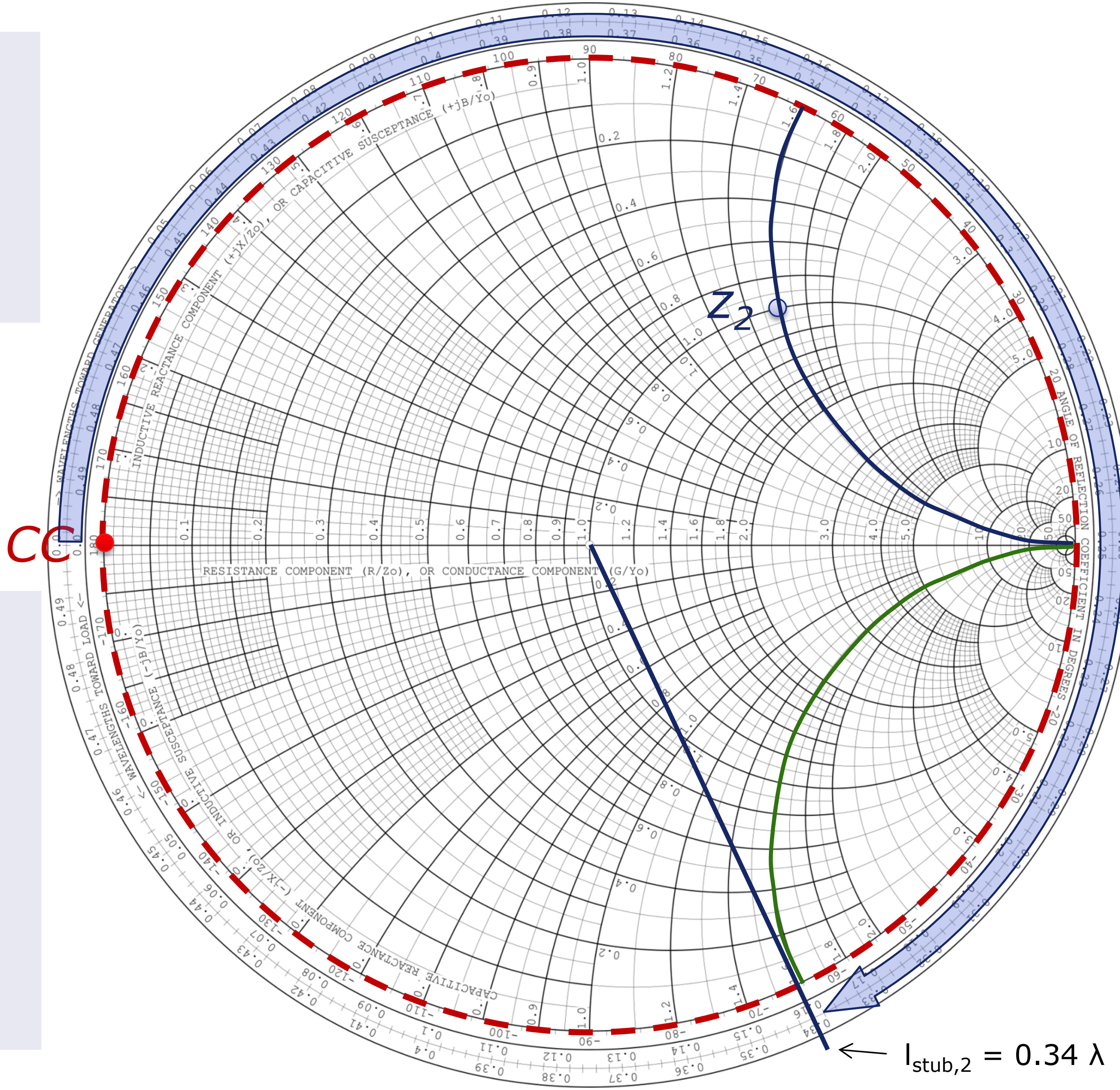
Lo stub dovrà fornire reattanza x=1.6.



Ricavo la lunghezza dello stub leggendo sulla ghiera esterna la lunghezza che deve avere una linea in c.c. per fornire quella reattanza in ingresso

Per il punto z_2 passa la curva a reattanza x=1.6.

Lo stub dovrà fornire reattanza x=-1.6.



Ricavo la lunghezza dello stub leggendo sulla ghiera esterna la lunghezza che deve avere una linea in c.c. per fornire quella reattanza in ingresso

La lunghezza d'onda di un segnale a 100 MHz che si propaga lungo la linea è

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{c_0/n}{\nu} = \frac{c_0/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8/2.05}{100 \cdot 10^6} = \mathbf{1.46\ m}$$

La condizione di uniformità è pertanto ottenuta con stub in serie:

- Posto a distanza **d_1 = 0.113λ = 16.5 cm** dal carico e lunghezza **$l_{stub,1}$ = 0.16λ = 23.4 cm**
- Posto a distanza **d_2 = 0.47λ = 68.6 cm** dal carico e lunghezza **$l_{stub,2}$ = 0.34λ = 49.6 cm**

Doppio stub in parallelo

Una linea di trasmissione è rappresentata da un circuito equivalente a parametri distribuiti con induttanza **L = 0.25 μH/m** e capacità **C = 100 pF/m**. La linea opera alla frequenza di **300 MHz** ed è chiusa su un carico ottenuto dalla connessione in serie di una resistenza **R_L = 20 Ω** e di un'induttanza **L_L = 26.5 pH**.

Dopo avere calcolato il coefficiente di riflessione sulla sezione di carico **ρ_L**, si adatti il carico utilizzando un adattatore costituito da **due stub in parallelo** posti a una distanza pari a λ/4 l'uno dall'altro.

Dai dati del problema ricavo direttamente **impedenza caratteristica** della linea e **impedenza di carico**.

L'impedenza caratteristica della linea vale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.25 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} = 50\ \Omega$$

L'impedenza del carico vale:

$$Z_L = R_L + j\omega L_L = 20 + j\ 2\pi\ 3 \cdot 10^8 = (20 + j50)\ \Omega$$

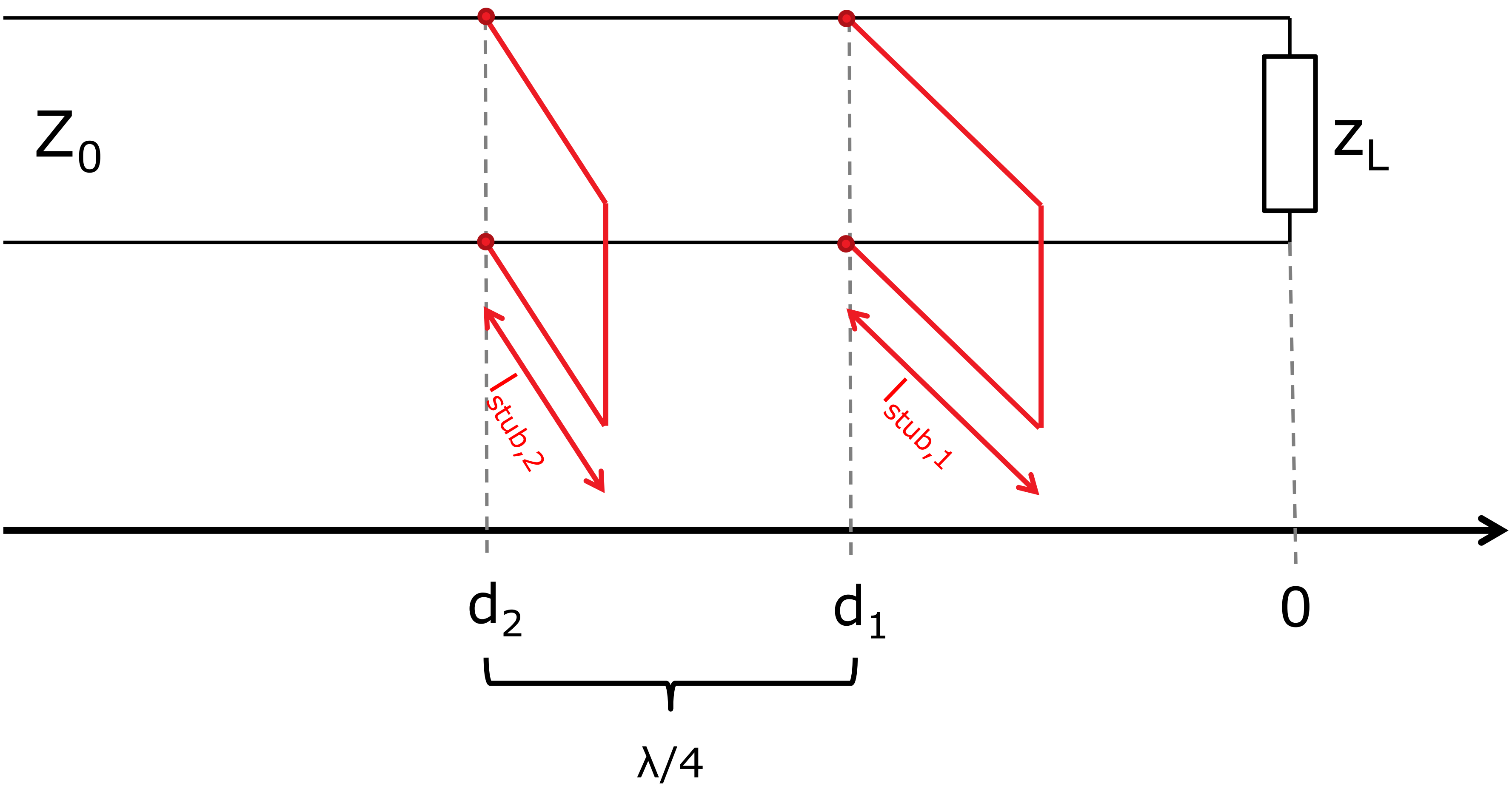
A cui corrisponde **un'impedenza normalizzata**:

$$z_L = \frac{20 + j50}{50} = 0.4 + j$$

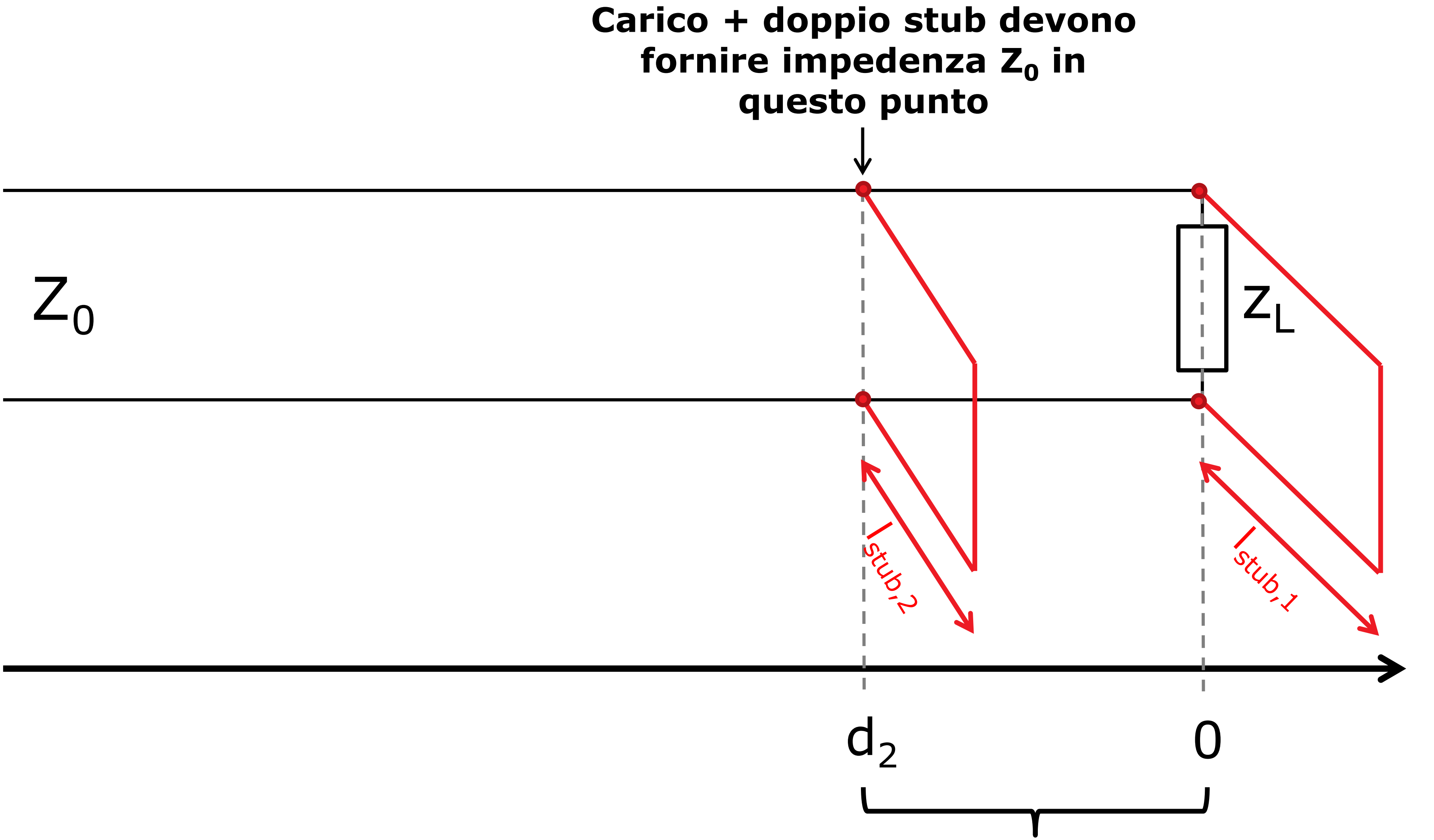
E **un'ammettenza normalizzata**:

$$y_L = \frac{1}{z_L} = \frac{1}{0.4 + j} = 0.345 - j0.862$$

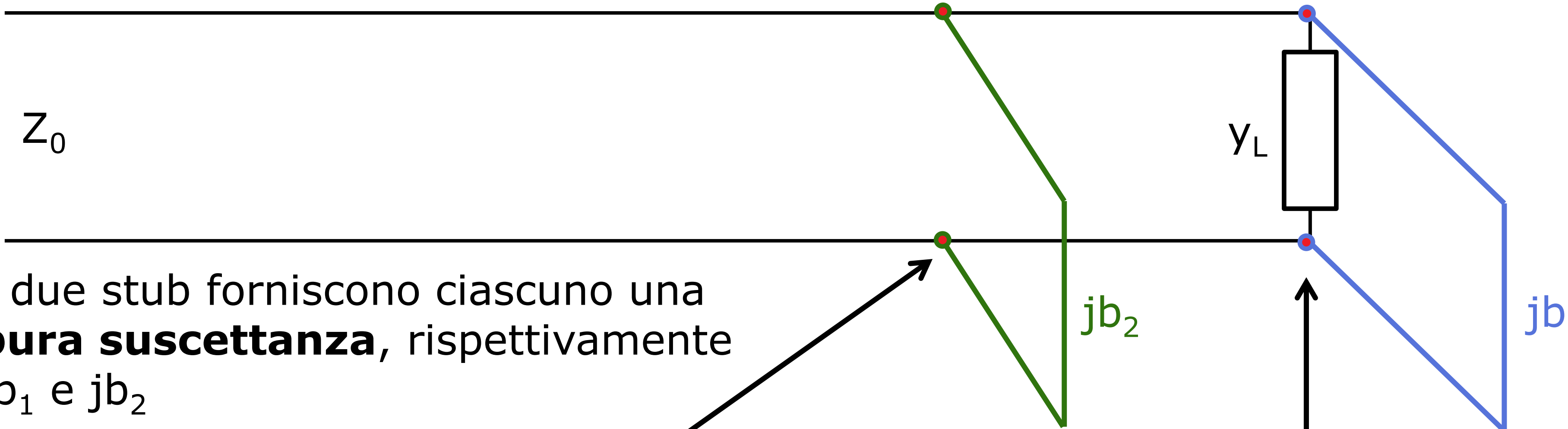
Lo schema della linea collegata al carico, adattato col doppio stub, è il seguente:



Posiziono il primo stub in corrispondenza della sezione di carico



Dovendo utilizzare stub in parallelo, è più pratico ragionare in termini di ammettenze



I due stub forniscono ciascuno una **pura suscettanza**, rispettivamente jb_1 e jb_2

L'ammettenza totale in questo punto è data dall'ammettenza di ingresso a una distanza λ/4 dal parallelo carico-stub #1, a sua volta in parallelo con stub #2.

Lo spostamento di λ/4 lungo la linea causa l'inversione dell'impedenza, pertanto l'ammettenza totale in questo punto varrà:

$$y = \frac{1}{{y_L}'} + jb_2 = \frac{1}{y_L + jb_1} + jb_2$$

L'ammettenza totale in questo punto è data dal parallelo carico-stub #1, e vale quindi:

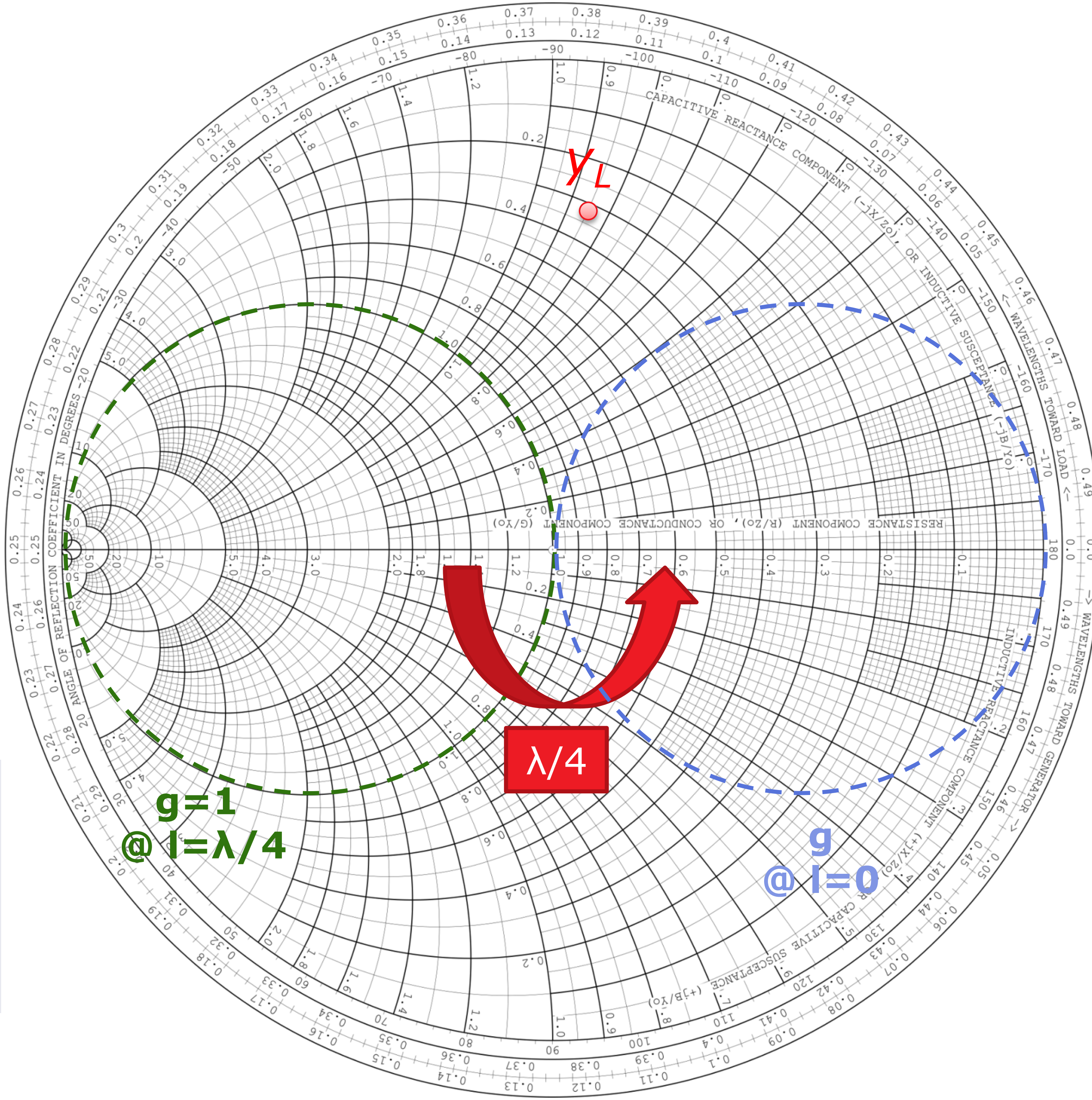
$$y_L' = y_L + jb_1$$

Individuo l'ammettenza del carico y_L sulla C.d.S.

Per prima cosa, dimensiono lo stub sulla sezione di carico…

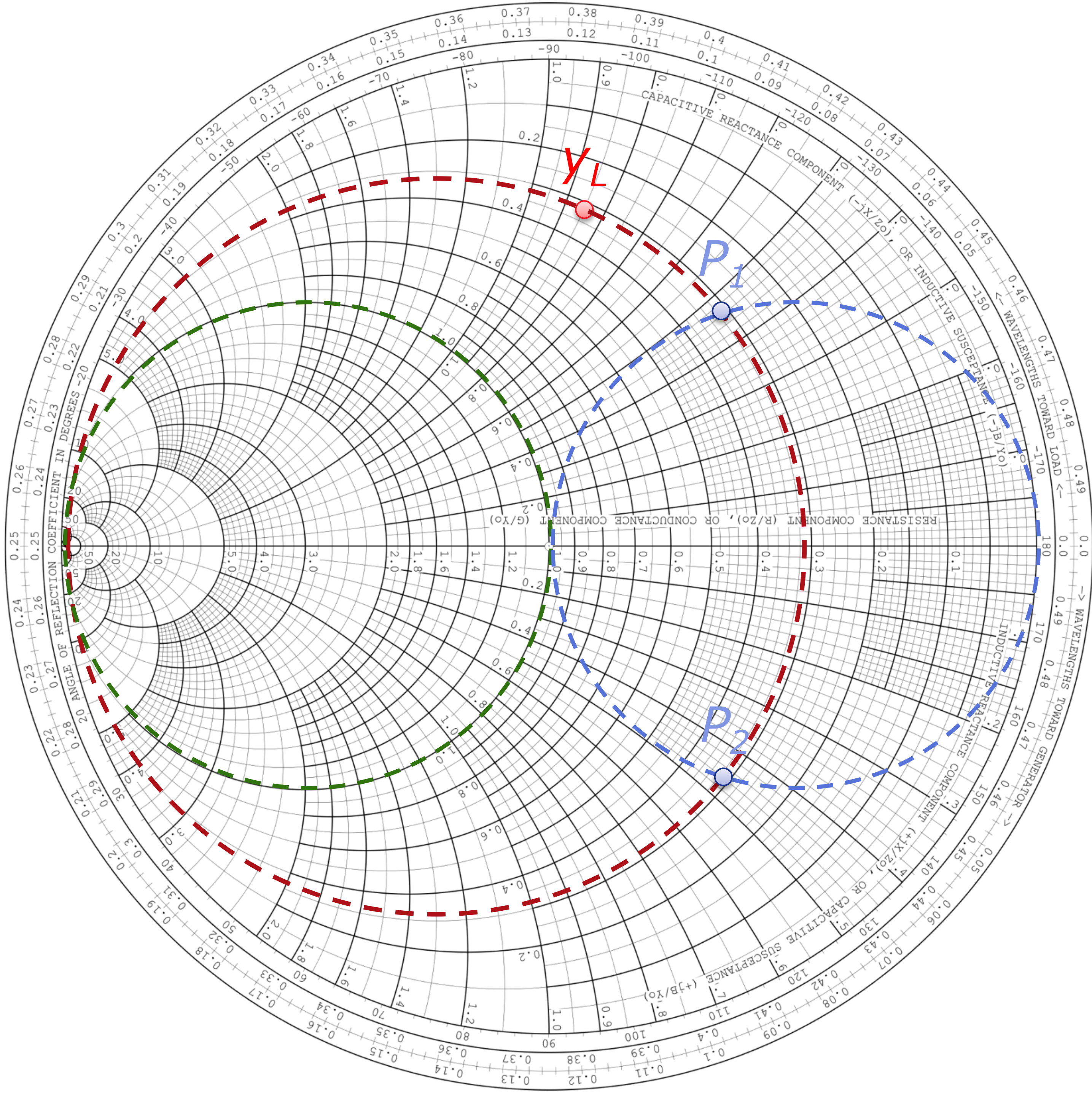
A distanza $d_2=\lambda/4$ dal carico devo avere **g=1** per potere adattare con uno stub

La conduttanza sulla sezione di carico sarà ottenuta ruotando di 180° la circonferenza g=1



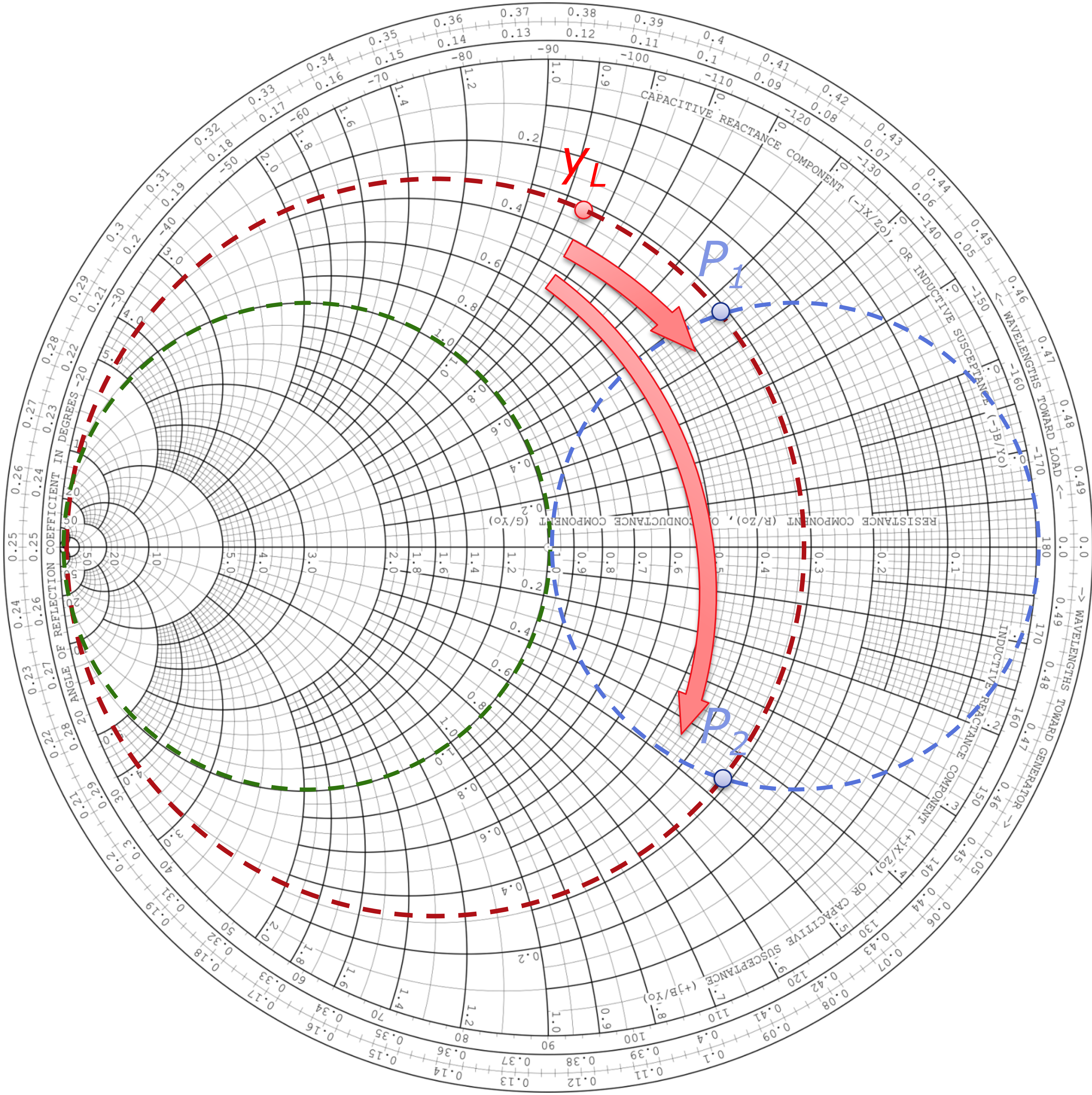
La parte reale dell'ammettenza sul carico è la conduttanza del carico (rossa)

La parte immaginaria dell'ammettenza sulla sezione di carico (= ammettenza carico + stub) deve stare sulla circonferenza blu (luogo dei punti che possono essere adattati con il secondo stub a λ/4 dal carico.



Lo stub 1 deve fornire una suscettanza tale da portare l'impedenza sulla sezione di carico da y_L a P_1 o P_2, cioè:

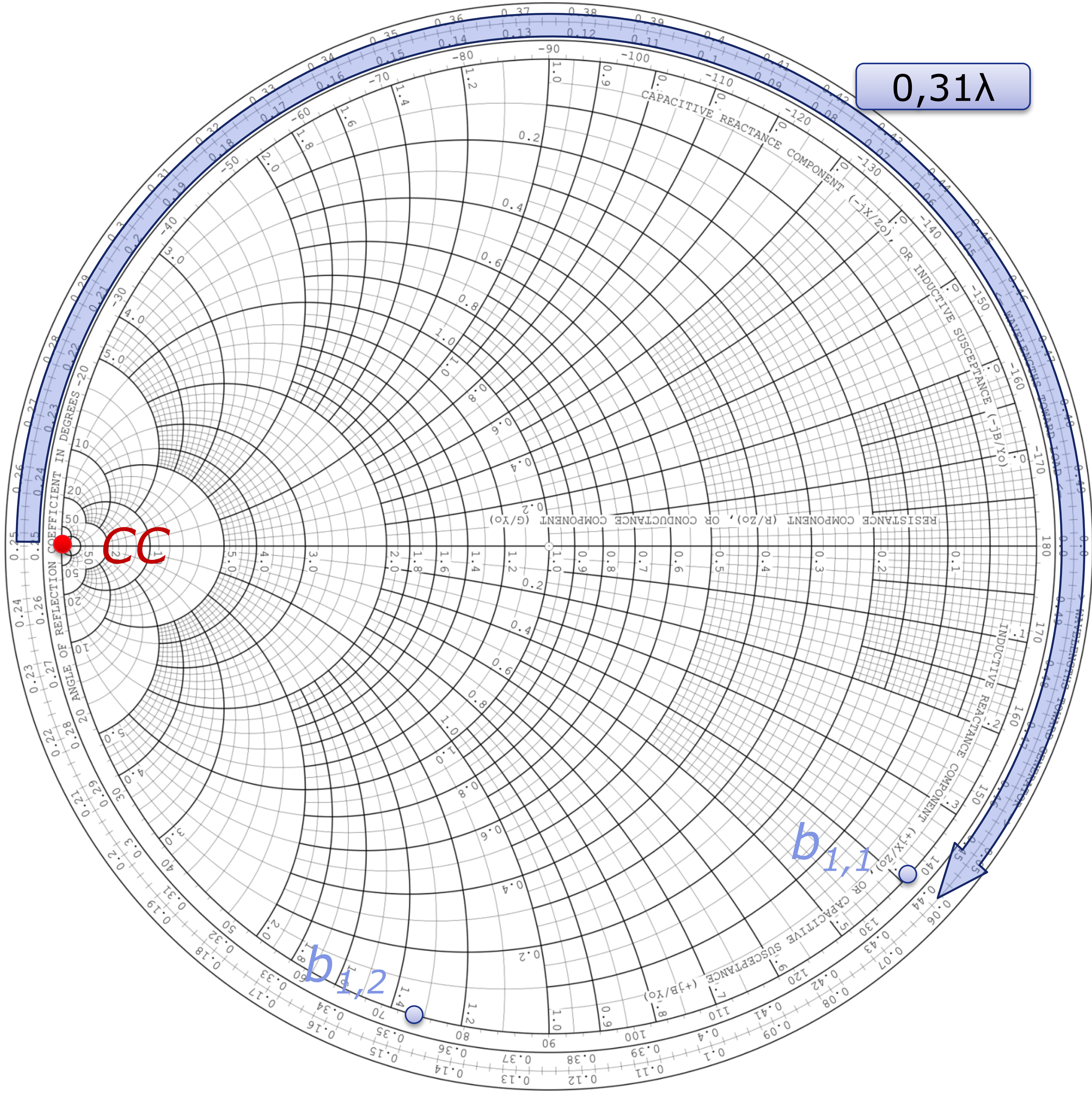
P_1: -0,476-(-0,862) = 0,386
P_2: 0,476-(-0,862) = 1,338



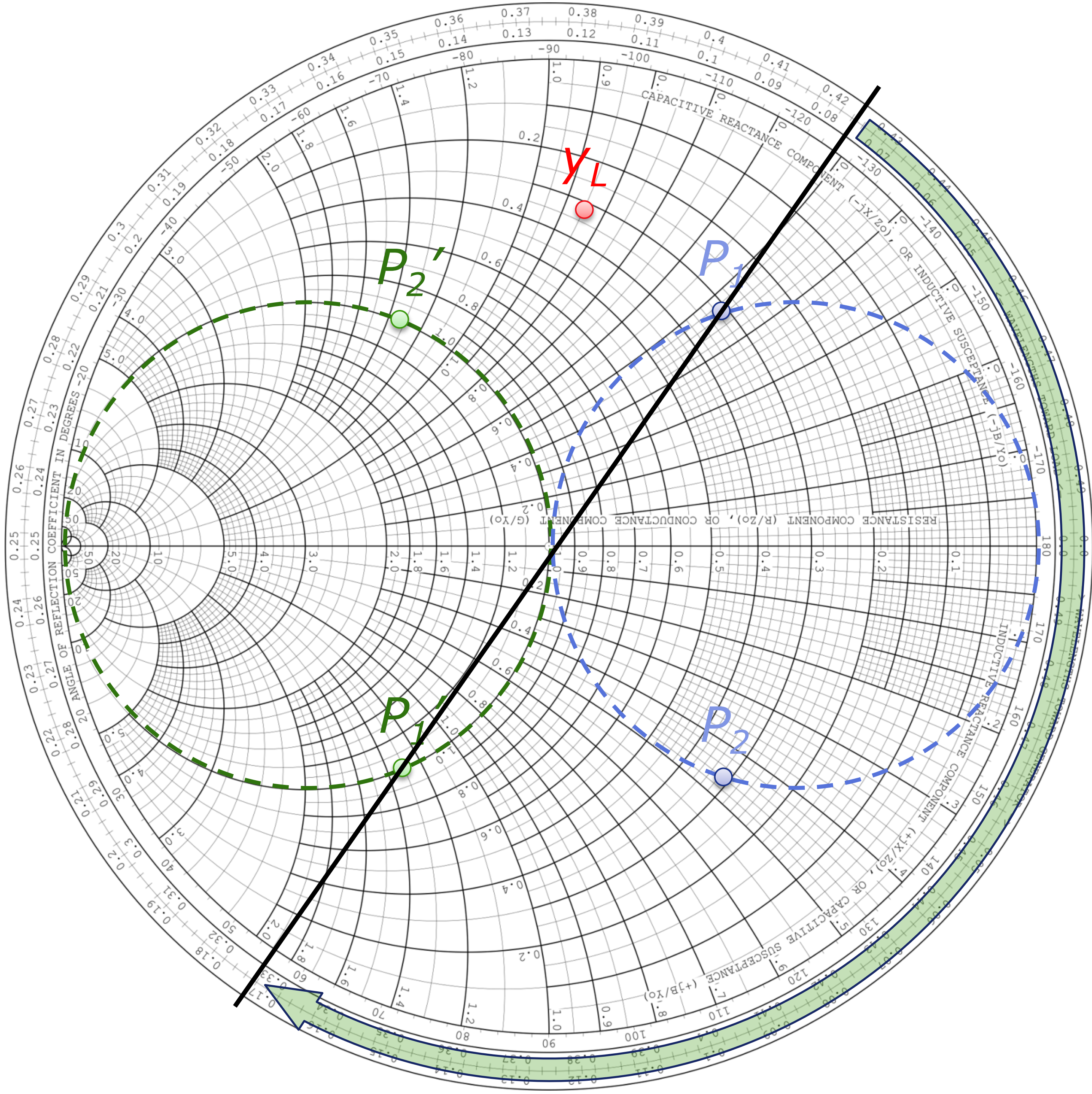
Ai valori di suscettanza richiesti per lo stub 1 corrispondono le lunghezze, misurate dal punto di c.c.:

$b_{1,1}$ = 0,386 ->
$l_{1,1}$ = 0,31λ

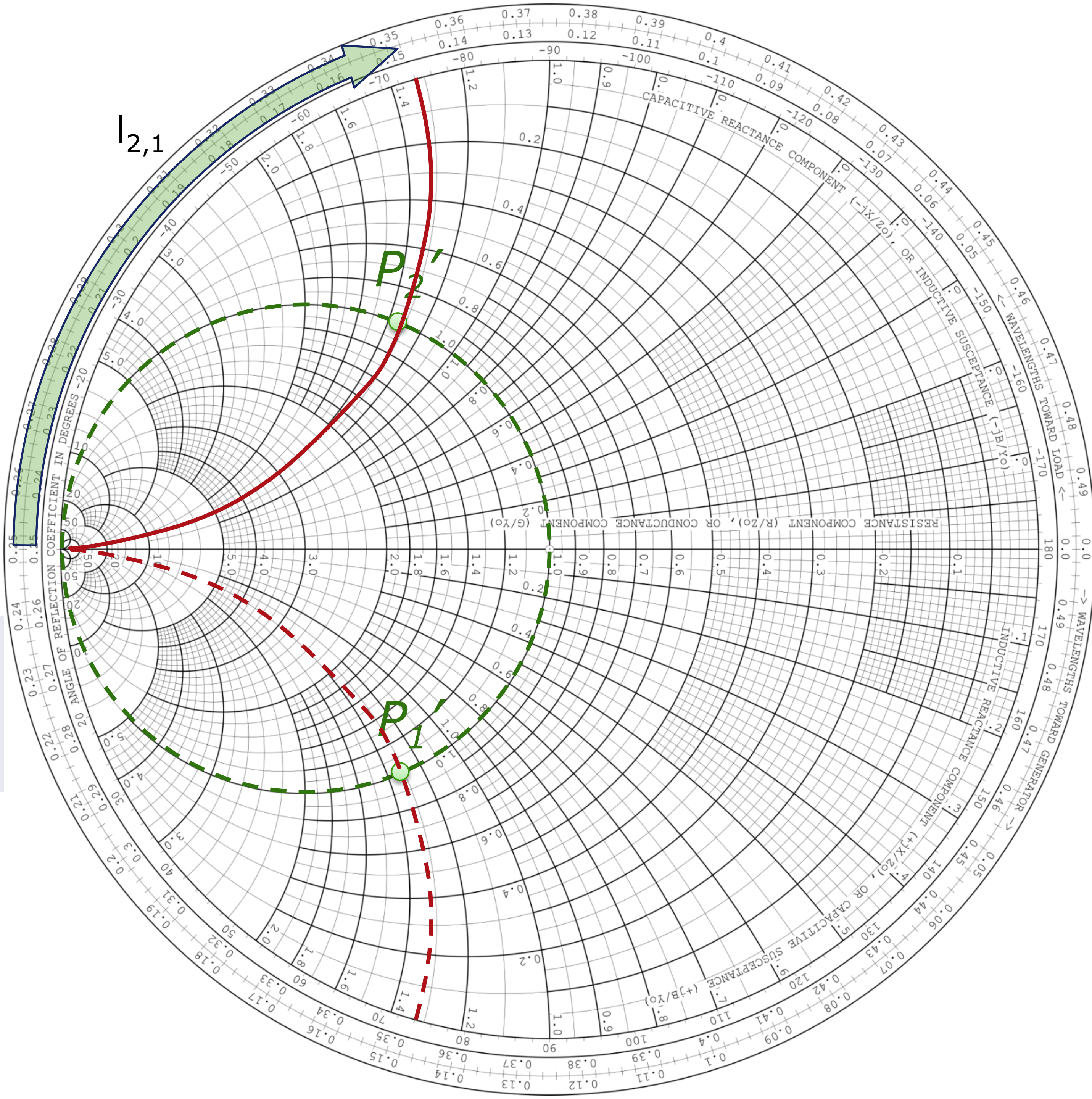
$b_{1,2}$ = 1,338 ->
$l_{1,2}$ = 0,397λ



Ottengo l'ammettenza da adattare col 2° stub, alla distanza di λ/4 dal carico, ruotando sulla carta di 180° da P_1 e P_2 in P_1' e P_2'



Determino le lunghezze $l_{2,1}$ e $l_{2,2}$ degli stub ruotando sulla circonferenza a $|\rho|=1$ dal punto di c.c. alla curva a suscettanza opposta rispetto a P_1' e P_2'



Trovo:

$l_{2,1} = 0.1\lambda$

$l_{2,2} = 0.4\ \lambda$

Soluzioni